Раздел № 02 Векторная алгебра

Тема № 01 Линейное пространство геометрических векторов

Лекция № 08

## Учебные вопросы:

1. Введение.
2. Понятие геометрического вектора. Линейные операции с векторами.
3. Коллинеарность и компланарность системы векторов.
4. Линейная зависимость и линейная независимость.
5. Базис и размерность пространства геометрических векторов.

Литература

1. Сборник задач по математике в четырех частях. Под общей редакцией А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича
2. Б.П. Демидович. Краткий курс высшей математики.
3. А.Е. Умнов. Аналитическая геометрия и линейная алгебра.
4. **Введение**

Предметом изучения в векторной алгебре являются векторные величины (векторы) и действия с ними. Примерами таких величин могут служить скорость и ускорение движущейся точки, сила и т.п. Они характеризуются не только своими численными значениями, но и направленностью. Начальные сведения о векторах и некоторых действиях с ними (сложение векторов, умножение вектора на число и скалярное произведение векторов) содержатся в школьном курсе элементарной математики. В данном разделе на основе дальнейшего развития и углубления этих сведений вводятся новые понятия линейной зависимости и линейной независимости векторов, базиса на некоторых множествах векторов, а также рассматриваются новые действия с векторами – векторное и смешанное произведения. Изучение свойств операций с векторами приводит к алгебраизации геометрических высказываний, т.е. к замене геометрических утверждений некоторыми векторными равенствами. Введение понятия координат вектора заменяет действия с векторами действиями с числами. Построенная таким образом теория, называемая «векторная алгебра», служит математическим аппаратом для построения аналитической геометрии и других разделов математики, а также имеет многочисленные приложения в физике, теоретической механике и различных технических дисциплинах.

**2. Понятие геометрического вектора. Линейные операции с векторами.**

 **Определение 1.** ***Геометрическим вектором*** называется направленный прямолинейный отрезок, для которого указано, какая из ограничивающих его точек считается началом, а какая концом. Начало вектора называют также точкой его приложения.

Если точки *A* и *B* – начало и конец данного вектора, то сам вектор обозначается символом $→$ или $\vec{a}$ (Рис. 1). Пусть выбрана какая-либо система измерения длин прямолинейных отрезков, иначе говоря, масштаб. Длиной вектора, или его модулем, называется длина отрезка, образующего вектор. Обозначение: $|→|$, $|\vec{a}|$.

*A*

*B*

Рис. 1. Изображение вектора $\vec{a}=\vec{AB}.$

**Определение 2.** Два вектора называются равными, если они лежат на параллельных прямых (или на одной прямой), одинаково направлены и имеют равные длины.

Таким образом, мы пришли к понятию свободного вектора, как класса равных векторов. Не имеет значения точка приложения вектора, каждый вектор определяет его длина и напрваление.

**Определение 3.** Вектор, у которого начало и конец совпадают, называется нулевым или нуль-вектором. Нулевой вектор не имеет определенного направления, а его модуль равен нулю.

Таким образом, можно считать все нуль-векторы равными и ввести для них единое обозначение: $\vec{0}$.

**Линейные операции с векторами**

**Определение 4.** Пусть даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Приложим вектор $\vec{b}$ к концу вектора $\vec{a}$. Тогда вектор, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец – с концом вектора $\vec{b}$, называется *суммой* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и обозначается $\vec{a}+\vec{b}$.

****Существуют два правила для нахождения суммы векторов (Рис. 2).

Рис. 2. Правила для нахождения суммы векторов.

**Определение 5.** *Произведением* вектора $\vec{a}$ на вещественное число λ называется вектор $\vec{b}$, определяемый следующими тремя условиями:

1) $|\vec{b}|=|λ|⋅|\vec{a}|;$

2) вектор $\vec{b}$ параллелен вектору $\vec{a}$;

3) $\vec{a}$ и $\vec{b}$ одинаково направлены, если $λ>0$, и противонаправлены, если $λ<0$.

**Свойства линейных операций над векторами**

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ **– коммутативность суммы**
2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ **- ассоциативность суммы**
3. $∀\vec{a} ∃!\vec{0}:\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ **– существование нулевого элемента**
4. $∀\vec{a} ∃!\left(-\vec{a}\right):-\vec{a}+\vec{a}=\vec{0}$ **- существование противоположного элемента**
5. $∀λ, μ\in R λ(μ\vec{a})=(λμ)\vec{a}$ **– ассоциативность относительно скалярного множителя**
6. $(λ+μ)\vec{a}=λ\vec{a}+μ\vec{a}$ **- дистрибутивность умножения вектора на сумму вещественных чисел**
7. $λ(\vec{a}+\vec{b})=λ\vec{a}+λ\vec{b}$ **- дистрибутивность умножения вещественного числа на сумму векторов**
8. $1⋅\vec{a}=\vec{a}$ **- свойство единицы**

**Замечание.** Как мы видим, множество геометрических векторов с введенными на нем линейными операциями – сложением и умножением на скаляр (число) – обладает всеми свойствами линейного пространства.

1. **Коллинеарность и компланарность.**

**Определение 5.** Векторы $\vec{e}\_{​1},  \vec{e}\_{​2},  … ,  \vec{e}\_{n}$ называются *коллинеарными*, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых.

Для обозначения коллинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ используется символ параллельности: $\vec{a} || \vec{b}$.

**Определение 6.** Векторы $\vec{e}\_{​1},  \vec{e}\_{​2},   …  ,   \vec{e}\_{n}$ называются *компланарными*, если они расположены на прямых, параллельных одной и той же плоскости.

**Определение 7.** Вектор, коллинеарный данному вектору $\vec{a}$, одинаково направленный с ним и имеющий единичную длину, называется *ортом* вектора $\vec{a}$ и обозначается $\vec{a}\_{0}$.

Вспомним некоторые теоремы, доказанные в школьном курсе математики.

**Теорема 1.** Пусть $\vec{a}\ne $ $\vec{0}$, $\vec{b}$ $\left‖\vec{a}\right.$ $⇔∃k\in R: \vec{b}=k\vec{a}$

***Доказательство***

Необходимость

* Если $\vec{b}=\vec{0},$ то $k=0.$
* Если $\vec{b}\ne \vec{0},$ то орты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ либо сонаправлены, либо противонаправлены, то есть возможны два варианта:

$$\vec{a}\_{0}\uparrow \uparrow \vec{b}\_{0}⇔\vec{b}\_{0}=\vec{a}\_{0}⇔\frac{1}{\left|\vec{b}\right|}\vec{b}=\frac{1}{\left|\vec{a}\right|}\vec{a}⇒\vec{b}=\frac{\left|\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|}\vec{a}⇒k=\frac{\left|\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|};$$

$$\vec{a}\_{0}\uparrow \downright \vec{b}\_{0}⇔\vec{b}\_{0}=-\vec{a}\_{0}⇔\frac{1}{\left|\vec{b}\right|}\vec{b}=-\frac{1}{\left|\vec{a}\right|}\vec{a}⇒\vec{b}=-\frac{\left|\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|}\vec{a}⇒k=-\frac{\left|\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|}.$$

Достаточность

Если $\vec{b}=k\vec{a}$ , то коллинеарность следует из определения произведения вектора

на число.

 **Теорема 2.**  Пусть $\vec{a}∦\vec{b}.$ Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны $⟺∃k, l\in R:\vec{c}=k\vec{a}+l\vec{b}.$

***Доказательство***

Необходимость

* Если $\vec{c}=\vec{0},$ то $k=0, l=0.$
* Если $\vec{c}\ne \vec{0}, $ то отложим его из той же точки, что и векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (Рис. 3).

$\vec{c}=\vec{OC}=\vec{OA}+\vec{OB}$,

*O*

$$\vec{a}$$

$$\vec{b}$$

$$\vec{c}$$

*A*

*B*

*C*

$$\vec{OA}∥\vec{a}⟹\vec{OA}=k\vec{a},$$

$$\vec{OB}∥\vec{b}⟹\vec{OB}=l\vec{b}.$$

Рис. 3. Иллюстрация к доказательству теоремы 2.

 Достаточность

 Если $\vec{c}=k\vec{a}+l\vec{b}$, то компланарность следует из смысла проделанных операций.

1. **Линейная зависимость и линейная независимость.**

Пусть даны векторы $\vec{e}\_{​1},  \vec{e}\_{​2},  … ,  \vec{e}\_{n}$. Линейные операции над векторами позволяют определить так называемую линейную комбинацию векторов.

**Определение 8.** *Линейной комбинацией* векторов $\vec{e}\_{​1},  \vec{e}\_{​2},  … ,  \vec{e}\_{n}$ называется вектор $\vec{a}$, равный сумме произведений данных векторов на произвольные вещественные числа $λ\_{1},  … ,  λ\_{n}$.

Таким образом, линейная комбинация векторов $\vec{e}\_{​1},  \vec{e}\_{​2},  … ,  \vec{e}\_{n}$ имеет вид:

 $λ\_{1}\vec{e}\_{​1}+λ\_{2}\vec{e}\_{​2}+ … +λ\_{n}\vec{e}\_{n}$,

где $λ\_{i}\in R$, $i=1,  … ,  n$. Очевидно, линейная комбинация векторов также является вектором.

**Определение 9.** Линейная комбинация векторов $\vec{e}\_{​1},  \vec{e}\_{​2},  … ,  \vec{e}\_{n}$ называется *нетривиальной*, если не все числа $λ\_{i}$, $i=1,  … ,  n$, равны нулю, т.е. $λ\_{1}^{2}+λ\_{2}^{2}+…++λ\_{n}^{2}>0$. Если все $λ\_{i}=0$, $i=1,  … ,  n$, то линейная комбинация называется *тривиальной*.

Заметим, что тривиальная линейная комбинация любых векторов является нуль-вектором. Действительно, $0⋅\vec{e}\_{​1}+0⋅  \vec{e}\_{​2}+  …+0⋅  \vec{e}\_{n}=\vec{0}$.

**Определение 10.** Векторы $\vec{e}\_{​1},  \vec{e}\_{​2},  … ,  \vec{e}\_{n}$ называются *линейно зависимыми*, если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нуль-вектору, иначе данные векторы называются *линейно независимыми*.

Для линейно зависимых векторов равенство

 $λ\_{1}\vec{e}\_{​1}+λ\_{2}\vec{e}\_{​2}+ … +λ\_{n}\vec{e}\_{n}=\vec{0}$

выполняется при некоторых $λ\_{1},  λ\_{2},  … ,  λ\_{n}$, удовлетворяющих условию:

$λ\_{1}^{2}+λ\_{2}^{2}+…+λ\_{n}^{2}>0$, а для линейно независимых векторов это равенство справедливо только при $λ\_{1}=λ\_{2}= … =λ\_{n}=0$.

**Свойства линейно зависимых векторов.**

* Если хотя бы один из векторов $\vec{e}\_{​1},\vec{e}\_{​2},\cdots ,\vec{e}\_{n}$ нулевой, то эти векторы линейно зависимы.
* Если какие-то *k* векторов в системе из *n* векторов $\vec{e}\_{​1},\vec{e}\_{​2},\cdots ,\vec{e}\_{n}$ линейно зависимы, где $2\leq k<n$, то и все векторы $\vec{e}\_{​1},\vec{e}\_{​2},\cdots ,\vec{e}\_{n}$ линейно зависимы.
* Векторы $\vec{e}\_{​1},\vec{e}\_{​2},\cdots ,\vec{e}\_{n}$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов является линейной комбинацией всех остальных.
* Система, содержащая нулевой вектор всегда линейно зависима.

**Геометрический смысл линейной зависимости векторов**

Один вектор линейно зависим тогда и только тогда, когда он нулевой. Действительно, равенство  при  справедливо только при .

Опираясь на доказанные выше теоремы 1 и 2, можно установить связь между коллинеарностью, компланарностью и линейной зависимостью.

**Теорема 3.** Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда они линейно зависимы.

**Теорема 4.** Три вектора $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда они линейно зависимы.

**Определение 11.** Система векторов $\vec{e}\_{1}, \vec{e}\_{2},…, \vec{e}\_{k}$ называется **базисом** векторного пространства *V*, если

1. она линейно независимая;
2. любой другой вектор $\vec{a}\in V $можно представить в виде:

$$\vec{a}=α\_{1}\vec{e}\_{1}+α\_{2}\vec{e}\_{2}+…+α\_{k}\vec{e}\_{k}.$$

Последнее равенство называется разложением вектора $\vec{a}$ по базису $B=\left\{\vec{e}\_{1}, \vec{e}\_{2},…, \vec{e}\_{k}\right\}$, сами числа $α\_{1}, α\_{2},\cdots ,α\_{k}$ называются координатами вектора $\vec{a}$ по базису $B.$

 **Теорема 5.** Координаты в базисе определяются единственным образом.

 Доказательство проводится от противного.

 Пусть есть два разложения по базису:

$$\left(α\_{1}-β\_{1}\right)\vec{e\_{1}}+…+(α\_{k}-β\_{k})\vec{e\_{k}}=\vec{0}⇒\left\{\begin{array}{c}α\_{1}=β\_{1}\\\vdots \\α\_{k}=β\_{k}\end{array}\right.$$

$\vec{a}=α\_{1}\vec{e\_{1}}+α\_{2}\vec{e\_{2}}+…+α\_{k}\vec{e\_{k}}$,

$$\vec{a}=β\_{1}\vec{e\_{1}}+β\_{2}\vec{e\_{2}}+…+β\_{k}\vec{e\_{k}}, тогда$$

**Замечание.** Базис пространства существует не единственный – число базисов, вообще говоря, бесконечно, но важно то, что число элементов базиса всегда одинаково.

**Определение 12.** Число векторов в базисе называется размерностью пространства.

**Примеры базисов**

*A*

*B*

*D*

*C*

*O*

*P*

$$\vec{a}$$

$$\vec{b}$$

$$\vec{c}$$

Базис – любые два неколлинеарных

вектора, лежащих в этой плоскости.

Базис – любой ненулевой вектор,

лежащий на этой прямой.

*V2 – множество компланарных векторов (множество векторов,*

лежащих в одной плоскости).

$$\vec{e\_{1}}$$

$$\vec{e\_{2}}$$

 **Теорема 6.** Любые три некомпланарных вектора образуют базис пространства.

Пример 2

*V1 – множество коллинеарных векторов (множество векторов,*

лежащих на одной прямой).

Пример 1

$$\vec{e\_{1}}$$

 ***Доказательство.***

 Мы уже знаем, что 3 некомпланарных вектора линейно независимы. Покажем, что любой вектор пространства можно разложить по трем некомпланарным векторам. Отложим все три вектора из общего начала и возьмем произвольный вектор $\vec{d}=\vec{OD}$ пространства с началом в той же точке *О*.

$$\vec{d}=\vec{OP}+\vec{PD}, \vec{OP} компланарен \vec{a} и \vec{b}, значит \vec{OP}=k\vec{a}+l\vec{b}. $$

$\vec{PD} коллинеарен \vec{c}, значит \vec{PD}=m\vec{c}⇒\vec{d}=k\vec{a}+l\vec{b}+m\vec{c},$таким образом, мы разложили произвольный вектор пространства по трем некомпланарным (линейно независимым) векторам, то есть тройка некомпланарных векторов является базисом пространства. Что и требовалось доказать.

 **Определение 12.** Базис $B=\left\{\vec{e}\_{1}, \vec{e}\_{2},…, \vec{e}\_{k}\right\}$ называется нормированным, если $\left|\vec{e}\_{i}\right|=1 при ∀i=1,2,\cdots ,k.$

 **Определение 13.** Базис $B=\left\{\vec{e}\_{1}, \vec{e}\_{2},…, \vec{e}\_{k}\right\}$ называется ортогональным, если $\vec{e}\_{i}⊥\vec{e}\_{j}$ при $∀i, j:i\ne j,$ то есть все векторы взаимно перпендикулярны (ортогональны).

 **Определение 14.** Ортогональный нормированный базис называется ортонормированным.

**Разработал доцент кафедры высшей математики М. В. Лагунова**

Базис – любые три некомпланарных

вектора.