Раздел № 02 Векторная алгебра

Тема № 01 Линейное пространство геометрических векторов

Лекция № 08

## Учебные вопросы:

1. Введение.
2. Понятие геометрического вектора. Линейные операции с векторами.
3. Коллинеарность и компланарность системы векторов.
4. Линейная зависимость и линейная независимость.
5. Базис и размерность пространства геометрических векторов.

Литература

1. Сборник задач по математике в четырех частях. Под общей редакцией А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича
2. Б.П. Демидович. Краткий курс высшей математики.
3. А.Е. Умнов. Аналитическая геометрия и линейная алгебра.
4. **Введение**

Предметом изучения в векторной алгебре являются векторные величины (векторы) и действия с ними. Примерами таких величин могут служить скорость и ускорение движущейся точки, сила и т.п. Они характеризуются не только своими численными значениями, но и направленностью. Начальные сведения о векторах и некоторых действиях с ними (сложение векторов, умножение вектора на число и скалярное произведение векторов) содержатся в школьном курсе элементарной математики. В данном разделе на основе дальнейшего развития и углубления этих сведений вводятся новые понятия линейной зависимости и линейной независимости векторов, базиса на некоторых множествах векторов, а также рассматриваются новые действия с векторами – векторное и смешанное произведения. Изучение свойств операций с векторами приводит к алгебраизации геометрических высказываний, т.е. к замене геометрических утверждений некоторыми векторными равенствами. Введение понятия координат вектора заменяет действия с векторами действиями с числами. Построенная таким образом теория, называемая «векторная алгебра», служит математическим аппаратом для построения аналитической геометрии и других разделов математики, а также имеет многочисленные приложения в физике, теоретической механике и различных технических дисциплинах.

**2. Понятие геометрического вектора. Линейные операции с векторами.**

**Определение 1.** ***Геометрическим вектором*** называется направленный прямолинейный отрезок, для которого указано, какая из ограничивающих его точек считается началом, а какая концом. Начало вектора называют также точкой его приложения.

Если точки *A* и *B* – начало и конец данного вектора, то сам вектор обозначается символом или (Рис. 1). Пусть выбрана какая-либо система измерения длин прямолинейных отрезков, иначе говоря, масштаб. Длиной вектора, или его модулем, называется длина отрезка, образующего вектор. Обозначение: , .

*A*

*B*



Рис. 1. Изображение вектора

**Определение 2.** Два вектора называются равными, если они лежат на параллельных прямых (или на одной прямой), одинаково направлены и имеют равные длины.

Таким образом, мы пришли к понятию свободного вектора, как класса равных векторов. Не имеет значения точка приложения вектора, каждый вектор определяет его длина и напрваление.

**Определение 3.** Вектор, у которого начало и конец совпадают, называется нулевым или нуль-вектором. Нулевой вектор не имеет определенного направления, а его модуль равен нулю.

Таким образом, можно считать все нуль-векторы равными и ввести для них единое обозначение: .

**Линейные операции с векторами**

**Определение 4.** Пусть даны два вектора и . Приложим вектор к концу вектора . Тогда вектор, начало которого совпадает с началом вектора , а конец – с концом вектора , называется *суммой* векторов и и обозначается .

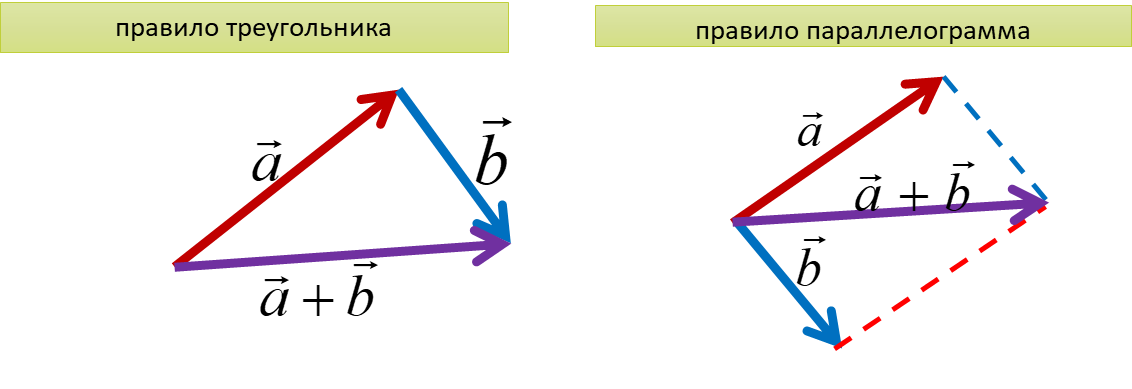
****Существуют два правила для нахождения суммы векторов (Рис. 2).

Рис. 2. Правила для нахождения суммы векторов.

**Определение 5.** *Произведением* вектора на вещественное число λ называется вектор , определяемый следующими тремя условиями:

1)

2) вектор параллелен вектору ;

3) и одинаково направлены, если , и противонаправлены, если .

**Свойства линейных операций над векторами**

1. **– коммутативность суммы**
2. **- ассоциативность суммы**
3. **– существование нулевого элемента**
4. **- существование противоположного элемента**
5. **– ассоциативность относительно скалярного множителя**
6. **- дистрибутивность умножения вектора на сумму вещественных чисел**
7. **- дистрибутивность умножения вещественного числа на сумму векторов**
8. **- свойство единицы**

**Замечание.** Как мы видим, множество геометрических векторов с введенными на нем линейными операциями – сложением и умножением на скаляр (число) – обладает всеми свойствами линейного пространства.

1. **Коллинеарность и компланарность.**

**Определение 5.** Векторы называются *коллинеарными*, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых.

Для обозначения коллинеарных векторов и используется символ параллельности: .

**Определение 6.** Векторы называются *компланарными*, если они расположены на прямых, параллельных одной и той же плоскости.

**Определение 7.** Вектор, коллинеарный данному вектору , одинаково направленный с ним и имеющий единичную длину, называется *ортом* вектора и обозначается .

Вспомним некоторые теоремы, доказанные в школьном курсе математики.

**Теорема 1.** Пусть ,

***Доказательство***

Необходимость

* Если то
* Если то орты векторов и либо сонаправлены, либо противонаправлены, то есть возможны два варианта:

Достаточность

Если , то коллинеарность следует из определения произведения вектора

на число.

**Теорема 2.**  Пусть Векторы компланарны

***Доказательство***

Необходимость

* Если то
* Если то отложим его из той же точки, что и векторы и (Рис. 3).

,

*O*

*A*

*B*

*C*

Рис. 3. Иллюстрация к доказательству теоремы 2.

Достаточность

Если , то компланарность следует из смысла проделанных операций.

1. **Линейная зависимость и линейная независимость.**

Пусть даны векторы . Линейные операции над векторами позволяют определить так называемую линейную комбинацию векторов.

**Определение 8.** *Линейной комбинацией* векторов называется вектор , равный сумме произведений данных векторов на произвольные вещественные числа .

Таким образом, линейная комбинация векторов имеет вид:

,

где , . Очевидно, линейная комбинация векторов также является вектором.

**Определение 9.** Линейная комбинация векторов называется *нетривиальной*, если не все числа , , равны нулю, т.е. . Если все , , то линейная комбинация называется *тривиальной*.

Заметим, что тривиальная линейная комбинация любых векторов является нуль-вектором. Действительно, .

**Определение 10.** Векторы называются *линейно зависимыми*, если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нуль-вектору, иначе данные векторы называются *линейно независимыми*.

Для линейно зависимых векторов равенство

выполняется при некоторых , удовлетворяющих условию:

, а для линейно независимых векторов это равенство справедливо только при .

**Свойства линейно зависимых векторов.**

* Если хотя бы один из векторов нулевой, то эти векторы линейно зависимы.
* Если какие-то *k* векторов в системе из *n* векторов линейно зависимы, где , то и все векторы линейно зависимы.
* Векторы линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов является линейной комбинацией всех остальных.
* Система, содержащая нулевой вектор всегда линейно зависима.

**Геометрический смысл линейной зависимости векторов**

Один вектор линейно зависим тогда и только тогда, когда он нулевой. Действительно, равенство  при  справедливо только при .

Опираясь на доказанные выше теоремы 1 и 2, можно установить связь между коллинеарностью, компланарностью и линейной зависимостью.

**Теорема 3.** Два вектора и коллинеарны тогда и только тогда, когда они линейно зависимы.

**Теорема 4.** Три вектора и компланарны тогда и только тогда, когда они линейно зависимы.

**Определение 11.** Система векторов называется **базисом** векторного пространства *V*, если

1. она линейно независимая;
2. любой другой вектор можно представить в виде:

Последнее равенство называется разложением вектора по базису , сами числа называются координатами вектора по базису

**Теорема 5.** Координаты в базисе определяются единственным образом.

Доказательство проводится от противного.

Пусть есть два разложения по базису:

,

**Замечание.** Базис пространства существует не единственный – число базисов, вообще говоря, бесконечно, но важно то, что число элементов базиса всегда одинаково.

**Определение 12.** Число векторов в базисе называется размерностью пространства.

**Примеры базисов**

*A*

*B*

*D*

*C*

*O*

*P*

Базис – любые два неколлинеарных

вектора, лежащих в этой плоскости.

Базис – любой ненулевой вектор,

лежащий на этой прямой.

*V2 – множество компланарных векторов (множество векторов,*

лежащих в одной плоскости).

**Теорема 6.** Любые три некомпланарных вектора образуют базис пространства.

Пример 2

*V1 – множество коллинеарных векторов (множество векторов,*

лежащих на одной прямой).

Пример 1

***Доказательство.***

Мы уже знаем, что 3 некомпланарных вектора линейно независимы. Покажем, что любой вектор пространства можно разложить по трем некомпланарным векторам. Отложим все три вектора из общего начала и возьмем произвольный вектор пространства с началом в той же точке *О*.

таким образом, мы разложили произвольный вектор пространства по трем некомпланарным (линейно независимым) векторам, то есть тройка некомпланарных векторов является базисом пространства. Что и требовалось доказать.

**Определение 12.** Базис называется нормированным, если

**Определение 13.** Базис называется ортогональным, если при то есть все векторы взаимно перпендикулярны (ортогональны).

**Определение 14.** Ортогональный нормированный базис называется ортонормированным.

**Разработал доцент кафедры высшей математики М. В. Лагунова**

Базис – любые три некомпланарных

вектора.