Раздел № 02 Векторная алгебра

Тема № 02 Декартовы координаты. Линейные операции с векторами, заданными декартовыми координатами

Лекция № 09

## Учебные вопросы:

1. Введение.
2. Прямоугольная декартова система координат.
3. Проекция вектора на ось.
4. Длина и направление вектора, заданного координатами.
5. Линейные операции с векторами, заданными координатами.

Литература

1. Сборник задач по математике в четырех частях. Под общей редакцией А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича
2. Б.П. Демидович. Краткий курс высшей математики.
3. А.Е. Умнов. Аналитическая геометрия и линейная алгебра.
4. **Введение**

На предыдущей лекции мы ввели понятие базиса на прямой, на плоскости и в пространстве. На основе понятия ортонормированного базиса вводится прямоугольная декартова система координат, названная именем великого французского ученого Рене Декарта (1596 – 1650). С помощью декартовой системы координат можно решать различные задачи геометрии и физики, о которых будет сказано на этой и следующих лекциях по векторной алгебре. В дальнейшем декартова система координат служит основой для построения аналитической геометрии.

**2. Прямоугольная декартова система координат.**

Рассмотрим трехмерное пространство векторов. Можно будет сделать то же самое для случая плоскости или прямой. В пространства, размерность которых больше трех, у нас, к сожалению, не получится заглянуть, но можно продолжить те же построения и на большую размерность. Правда, уже без картинок.

Прямоугольная декартова система координат может быть построена следующим образом (Рис. 1).

Рис. 1. Декартова система координат.

Точка начало координат. Это может быть любая точка в пространстве.

ортонормированный базис. Скобки такого вида мы будем использовать в том случае, когда важен порядок следования векторов в базисе.

Ось направление которой определяет орт , называется осью абсцисс.

Ось направление которой определяет орт , называется осью ординат.

Ось направление которой определяет орт , называется осью аппликат.

Как мы знаем, любой вектор пространства можно разложить по базису

(1)

Декартовыми координатами вектора называются координаты в базисе

Вектор, , начало которого совпадает с началом координат, называется радиус-вектором точки *А*. Декартовы координаты точки *А* – координаты ее радиус-вектора.

Поскольку разложение по базису (1) единственно, то каждой точке в пространстве отвечают три декартовых координаты, определяемые также единственным образом. В этом смысле мы можем отождествлять геометрический вектор и вектор арифметического пространства, то есть каждой точке или вектору ставить во взаимно однозначное соответствие упорядоченную тройку координат. В зависимости от ситуации, эти 3 координаты будем записывать в строчку или в столбец и записывать:

1. **Проекция вектора на ось.**

**Определение 1.** Векторной проекцией на ось , направление которой определено направлением орта , называется вектор , где проекции точек на ось (Рис. 1).

Рис. 1. Векторная проекция.

**Определение 2.** Скалярной проекцией (проекцией) вектора на ось называется число, обозначаемое , где знак выбирается следующим образом: плюс, если , и минус, если .

**Свойства проекции**

**Теорема 1.** (О вычислении проекции)

, где .

***Доказательство***

Возможны 3 случая, изображенные на рисунке 2. В каждом случае легко проверить, что эта формула выполняется.

1

*|*

2

3

Рис. 2. Три случая для доказательства теоремы о вычислении проекции.

***Следствие.*** Векторная проекция .

**4. Длина и направление вектора**

Каждый геометрический вектор характеризуется длиной и направлением. Зная его декартовы координаты, можно найти его длину и охарактеризовать направление вектора. Прежде всего, докажем теорему о связи декартовых координат, введенных в пункте 2, и проекциями радиус-вектора на координатные оси.

**Теорема 2.** Координаты вектора в базисе совпадают с проекциями этого вектора на координатные оси, то есть , , .

***Доказательство*** приведено на (Рис. 3).

1

3

2

Рис. 3

***Следствие.*** Если то .

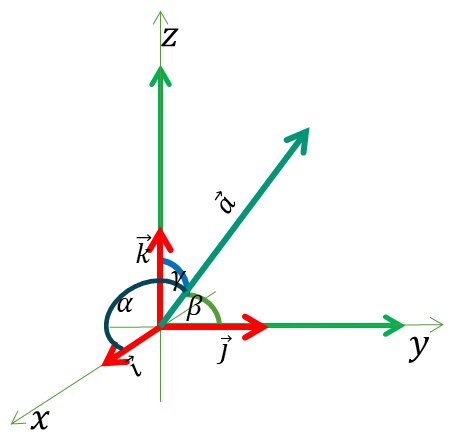
****** Для того, чтобы задать направление вектора , нужно знать углы, которые данный вектор образует с координатными осями. На рисунке 4 изображен вектор , образующий углы c соответствующими координатными углами. Используя предыдущие две теоремы, можно найти, косинусы этих углов. Эти косинусы называются направляющими косинусами вектора , они и определяют направления самого вектора.

Рис. 4.

**Замечания.**

1. Направляющие косинусы вектора координаты его орта
2. Для того, чтобы три угла задавали направление некоторого вектора, необходимо и достаточно, чтобы
3. **Линейные операции с векторами, заданными в координатной форме.**

Пусть даны два вектора, заданные декартовыми координатами,

, а также число , тогда

Эти два свойства означают, что при сложении векторов соответствующие координаты складываются, а при умножении на число умножаются на это число. Для доказательства этих формул достаточно использовать разложение векторов по базису и свойства линейных операций с векторами. Можно заметить, что эти две операции проводятся точно так же, как и операции с матрицами-строками, то есть с арифметическими векторами.

**Разработал доцент кафедры высшей математики М. В. Лагунова**