

Раздел № 02 Векторная алгебра

Тема № 03 Произведения векторов: скалярное,
векторное, смешанное

Лекция № 10

Учебные вопросы:

1. Введение.
2. Скалярное произведение.
3. Векторное произведение.
4. Смешанное произведение.

Литература

1. Сборник задач по математике в четырех частях. Под общей редакцией А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича
2. Б.П. Демидович. Краткий курс высшей математики.
3. А.Е. Умнов. Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

1. Введение

На предыдущей лекции мы ввели декартовы координаты и изучили, как найти длину и определить направление вектора, если известны его декартовы координаты. Также были получены формулы для нахождения координат векторов, получаемых при помощи линейных операций (сложении или умножении на скаляр). На этой лекции мы рассмотрим нелинейные операции с векторами, а именно различные способы умножения векторов.

2. Скалярное произведение.

Определение 1. Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число (скаляр), обозначаемое $\vec{a} \cdot \vec{b}$ или $(\vec{a}, \vec{b})$ и равное произведению их длин на косинус угла между ними: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$.

Свойства скалярного произведения

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \operatorname{pr}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \operatorname{pr}_{\vec{b}} \vec{a}$
3. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$
4. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$
5. $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$
6. $(k\vec{a} + l\vec{b}) \cdot \vec{c} = k\vec{a} \cdot \vec{c} + l\vec{b} \cdot \vec{c}$

Замечание. Иногда, если речь идет именно о скалярном произведении, то знак умножения (точка) между векторами не ставится. Если пишут $\vec{a}^2$, то имеется в виду скалярный квадрат вектора, то есть квадрат его длины.

Применение скалярного произведения

Скалярное произведение имеет широкое применение. В дальнейшем курсе высшей математики мы встретимся также со скалярным произведением функций, например. В курсе физики скалярное произведение нужно для вычисления работы силы. В задачах векторной алгебры и аналитической геометрии скалярное произведение применяют для нахождения длин векторов и углов между ними.

1. $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$
2. $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$
3. $\operatorname{pr}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}$

Еще одно важное применение скалярного произведения заключается в том, что с его помощью мы можем получить критерий взаимной ортогональности векторов.

Теорема 1. (Необходимое и достаточное условие ортогональности)

$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, то есть векторы ортогональны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.

Доказательство

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0 \iff \begin{cases} \widehat{\vec{a}, \vec{b}} = \frac{\pi}{2} \\ \vec{a} = \vec{0} \\ \vec{b} = \vec{0} \end{cases} \iff \vec{a} \perp \vec{b}.$$

Выражение скалярного произведения через координаты векторов

Пусть есть два вектора, заданные декартовыми координатами: $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Найдем выражение для скалярного произведения через координаты

векторов, используя разложение ортонормированному по базису $B=\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ и свойства скалярного произведения, получим:

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = \\ &= a_x b_x \vec{i}^2 + a_x b_y \vec{i} \cdot \vec{j} + a_x b_z \vec{i} \cdot \vec{k} + \\ &+ a_y b_x \vec{j} \cdot \vec{i} + a_y b_y \vec{j}^2 + a_y b_z \vec{j} \cdot \vec{k} + \\ &+ a_z b_x \vec{k} \cdot \vec{i} + a_z b_y \vec{k} \cdot \vec{j} + a_z b_z \vec{k}^2.\end{aligned}$$

Поскольку базисные векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ являются взаимно перпендикулярными ортами, то $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$ и $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$, и мы получим формулу для вычисления скалярного произведения через координаты векторов:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (1)$$

Замечание

Из формулы (1) можно заметить, что если координаты вектора $\vec{a}$ записать в матрицу-строку, а координаты вектора $\vec{b}$ – в столбец, то скалярное произведение – это единственный элемент матрицы, равной произведению этих строки и столбца.

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (a_x \ a_y \ a_z) \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)$$

3. Векторное произведение.

Векторное произведение, в отличие от скалярного, представляет собой вектор, то есть мы должны знать его длину и направление.

Определение 2. Векторным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, обозначаемый $\vec{a} \times \vec{b}$ или $[\vec{a}, \vec{b}]$, этот вектор удовлетворяет следующим условиям:

1. $\vec{c} \perp \vec{a} \wedge \vec{c} \perp \vec{b}$,
2. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$,

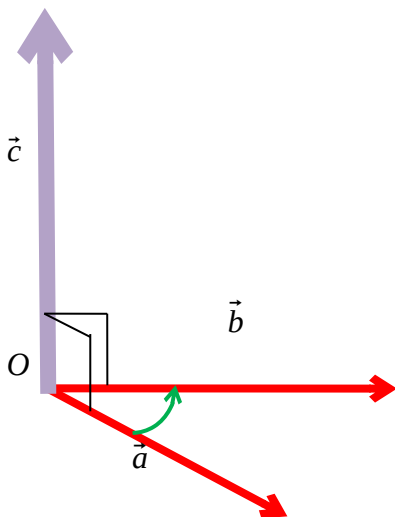
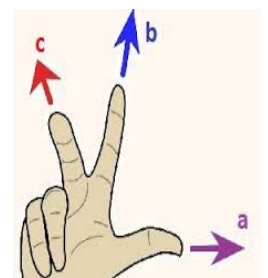


Рис. 1. Векторное произведение

3. $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} > - \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ – правая тройка векторов.

Условия 1 и 2 задают длину и определяют два возможных направления для вектора $\vec{c}$, а поскольку нам нужен один вектор, то в третьем условии как раз и выбран такой вектор. Угловые скобки означают, что порядок следования векторов в тройке важен.



Определить ориентацию тройки можно по правилу правой руки (Рис. 2) или по правилу буравчика, как это делают в курсе физики.

Рис. 2. Правило правой руки

Свойства векторного произведения

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ – антикоммутативность векторного произведения
2. $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$
3. $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$
4. $(k\vec{a}) \times \vec{b} = k(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (k\vec{b})$

Замечания.

- Поскольку векторный квадрат вектора всегда равен нулевому вектору, не имеет смысла вводить для него отдельное обозначение.
- Векторное произведение можно использовать для проверки коллинеарности векторов, но этот способ довольно нерациональный. Координаты коллинеарных векторов всегда пропорциональны, и это видно сразу. Тем не менее, справедлив следующий критерий коллинеарности.

Теорема 2. (Необходимое и достаточное условие коллинеарности)

$\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, то есть два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулевому вектору.

Доказательство

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \iff |\vec{a} \times \vec{b}| = 0 \iff |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0 \iff \begin{cases} \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0 \\ \vec{a} = \vec{0} \\ \vec{b} = \vec{0} \end{cases} \iff \vec{a} \parallel \vec{b}.$$

Применение векторного произведения

Векторное произведение применяется во многих физических задачах, в частности, для определения момента силы. Оно также широко применяется в компьютерной графике. В задачах по векторной алгебре векторное произведение также имеет большое значение. С его помощью решаются следующие вопросы.

1. Вычисление площади параллелограмма или треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$. $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$, то есть площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, численно равна длине векторного произведения. Для нахождения площади треугольника достаточно разделить это число на 2.
2. Проверка коллинеарности векторов. Не очень удобно использовать для этой цели векторное произведение, потому что коллинеарность лучше исследовать, используя линейную зависимость векторов, то проверить, что соответствующие координаты пропорциональны.
3. Вычисление синуса угла между векторами. Удобнее, конечно, искать косинус угла, используя скалярное произведение.
4. Самое важное применение – это нахождение вектора, перпендикулярного сразу двум векторам. Если нужно найти вектор $\vec{c}$, перпендикулярный векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то одним из таких векторов будет $\vec{a} \times \vec{b}$, а множество всех векторов, перпендикулярных двум данным, имеет вид: $k(\vec{a} \times \vec{b}), \forall k \in R$.

Выражение векторного произведения через координаты векторов

Пусть есть два вектора, заданные декартовыми координатами: $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Используя разложение по базису $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ и свойства векторного произведения, получим:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = \\ &= a_x b_y \vec{i} \times \vec{j} + a_x b_z \vec{i} \times \vec{k} + a_y b_x \vec{j} \times \vec{i} + a_y b_z \vec{j} \times \vec{k} + a_z b_x \vec{k} \times \vec{i} + a_z b_y \vec{k} \times \vec{j} \end{aligned}$$

$$+a_y b_x \vec{j} \times \vec{i} + a_y b_y \vec{j} \times \vec{j} + a_y b_z \vec{j} \times \vec{k} + \vec{i} + a_z b_x \vec{k} \times \vec{i} + a_z b_y \vec{k} \times \vec{j} + a_z b_z \vec{k} \times \vec{k}. \quad (2)$$

Уберем из последнего равенства нулевые векторы $\vec{i} \times \vec{i}, \vec{j} \times \vec{j}, \vec{k} \times \vec{k}$. Осталось посмотреть на рисунок 3 и найти векторные произведения каждой пары базисных векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{j} &= \vec{k} \Rightarrow \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \\ \vec{i} \times \vec{k} &= -\vec{j} \Rightarrow \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \\ \vec{j} \times \vec{k} &= \vec{i} \Rightarrow \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}. \end{aligned}$$

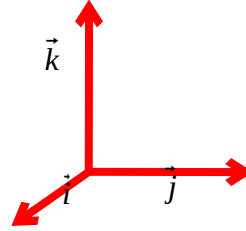


Рис. 3.

Ортонормированный базис $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Подставим найденные значения в выражение (2), получим:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Замечание. Получился определитель, в первой строке которого не числа, а векторы. Такой определитель называют символическим. Свойства определителя выполняются частично. Например, первую строку нельзя прибавить ни к одной из двух оставшихся строк.

3. Смешанное произведение.

Определение 3. Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ называется произведение $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.

Замечания

- Умножение осуществляется только в таком порядке, как записано в формуле. Другие варианты невозможны, поэтому скобки можно не ставить.
- В результате смешанного произведения получается число.

Теорема 3. (Геометрический смысл смешанного произведения)

Если векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ не компланарны, то $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \pm V$, где

V – объем параллелепипеда, построенного на этих векторах, как на ребрах;

знак плюс выбирается, если тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – правая;

знак минус выбирается, если тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – левая.

Доказательство

Пусть тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – правая (Рис. 4). Тогда

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = |\vec{a}| |\vec{b} \times \vec{c}| \cos \varphi, \quad |\vec{b} \times \vec{c}| = S_{\text{пар}}, \quad h = |\vec{a}| \cos \varphi, \quad \text{причем угол } \varphi \text{ – острый.}$$

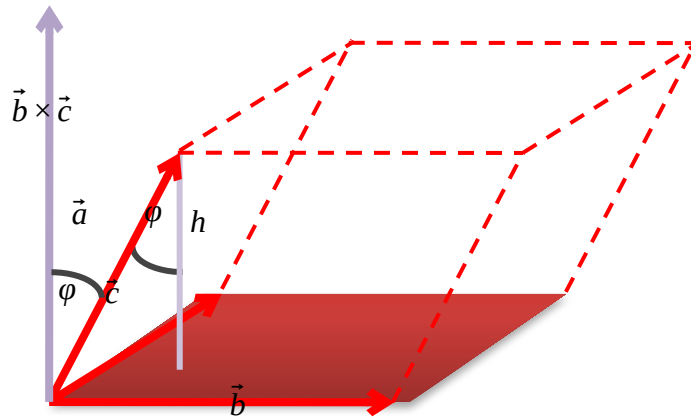


Рис. 4. Рисунок к доказательству теоремы 3.

$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = S_{\text{пар}} h = V$, здесь $S_{\text{пар}}$ — площадь параллелограмма, лежащего в основании параллелепипеда.

Если тройка векторов левая, то угол φ — тупой, тогда $\cos \varphi < 0$ и $h = -|\vec{a}| \cos \varphi$.

Замечания

- Заметим, что $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$, поскольку получится тот же параллелепипед, разумеется, с тем же объемом, а ориентация троек $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, $\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}$ одинаковая.
- Поскольку знаки умножения, согласно предыдущему замечанию, можно менять местами, для смешанного произведения часто используют обозначение $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$.
- Благодаря доказанной теореме, можно получить критерий компланарности трех векторов.

Теорема 4. (Необходимое и достаточное условие компланарности)

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — компланарны $\Leftrightarrow \vec{a} \vec{b} \vec{c} = 0$.

Применение смешанного произведения

Применение смешанного произведения вытекает из теоремы 4.

1. Вычисление объема параллелепипеда и тетраэдра (Рис. 5).

$$V_{\text{пар}} = |\vec{a} \vec{b} \vec{c}|, V_{\text{тетр}} = \frac{1}{6} |\vec{a} \vec{b} \vec{c}|$$

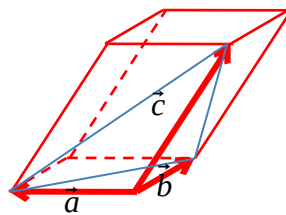


Рис. 5. Параллелепипед и тетраэдр, построенные на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

2. Определение ориентации тройки векторов. Если смешанное произведение положительно, то тройка правая, если отрицательное, то левая.
3. Проверка компланарности тройки векторов.

Выражение смешанного произведения через координаты векторов

Пусть есть векторы: $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$. Используем полученные ранее формулы (1) и (3), получим выражение их смешанного произведения через декартовы координаты.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=a_x\begin{vmatrix}b_y & b_z \\ c_y & c_z\end{vmatrix}-a_y\begin{vmatrix}b_x & b_z \\ c_x & c_z\end{vmatrix}+\textcolor{red}{i}a_z\begin{vmatrix}b_x & b_y \\ c_x & c_y\end{vmatrix},$$

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$$

Разработал доцент кафедры высшей математики М. В. Лагунова