

Раздел № 03 Комплексные числа и
многочлены

Тема № 01 Комплексные числа

Лекция № 11

Учебные вопросы:

1. Введение.
2. Определение и алгебраическая форма комплексного числа.
3. Тригонометрическая форма комплексного числа.
4. Показательная форма комплексного числа.

Литература

1. Сборник задач по математике в четырех частях. Под общей редакцией А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича
2. Б.П. Демидович. Краткий курс высшей математики.
3. А.Е. Умнов. Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

1. Введение

Комплексные числа возникают в связи с задачей решения алгебраических уравнений. Известно, например, что если дискриминант квадратного уравнения отрицательный, то уравнение не имеет решений. На самом деле, оно не имеет вещественных решений. Возникает необходимость расширить поле вещественных чисел так, чтобы такие уравнения имели решение. Комплексные числа являются также основой теории функции комплексной переменной, являющейся мощным математическим аппаратом для решения многих технических задач, включая обработку сигналов, компьютерную графику, расчет цепей переменного тока и многое другое.

2. Определение и алгебраическая форма комплексного числа.

Определение 1. Комплексным числом называется упорядоченная пара вещественных чисел (a, b) , $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$.

Чтобы не путать с вещественными числами, комплексные числа часто обозначают буквой z , то есть $z = (a, b)$. Множество всех комплексных чисел обозначается $\mathbb{C}$.

Определение 2. Числа a и b называют соответственно вещественной и мнимой частью числа z и пишут $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$.

Определение 3. Два комплексных числа $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$ считаются равными, если равны их вещественная и мнимая части, то есть

$$z_1 = z_2 \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 = b_2. \end{cases}$$

Определение 4. Число $z = (a, 0) \equiv a \in \mathbb{R}$, то есть если мнимая часть числа равна нулю, то такое число отождествляется с вещественным.

Определение 5. Число $z = (0, b)$, где $b \neq 0$, называется чисто мнимым.

Изображение комплексных чисел

Для изображения комплексных чисел используют комплексную плоскость. Аналогично с декартовой системой координат вводятся две взаимно перпендикулярные оси – вещественная ось (Re) и мнимая ось (Im) (Рис. 1). Точка с координатами (a, b) или соответствующий радиус-вектор являются изображением данного комплексного числа $z = (a, b)$.

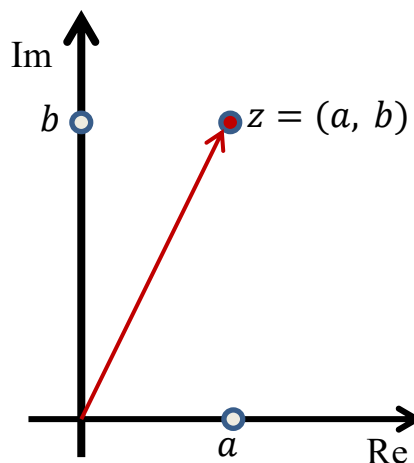


Рис. 1. Изображение комплексного числа.

Сложение и умножение комплексных чисел

Пусть даны два комплексных числа: $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$, сумма и произведение этих чисел определяется следующими правилами:

- Правило сложения:

$$z_1 + z_2 = (a_1, b_1) + (a_2, b_2) \stackrel{\text{def}}{=} (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \in \mathbb{C}. \quad (1)$$

- Правило умножения:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) \stackrel{\text{def}}{=} (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1) \in \mathbb{C} \quad (2)$$

Замечание. Можно проверить, что при сложении и умножении вещественных чисел, задаваемых парами $(a_1, 0)$ и $(a_2, 0)$, будут получаться те же самые числа, как если бы мы просто складывали или умножали их так же, как обычно. Кроме того, справедливы все формулы сокращенного умножения.

Важный пример. Согласно формуле (2), возведем к квадрат число $z = (0, 1)$.

$$z^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = (-1, 0) = -1,$$

последнее равенство означает, что мы «нашли» число, квадратом которого является отрицательное вещественное число (-1) .

Определение 5. Число $(0, 1)$ (квадратом которого является (-1)) называется мнимой единицей и обозначается буквой i .

Замечания

- Часто говорят, что число i — это корень из (-1) . Но это только полуправда — об извлечении корня из комплексного числа будет сказано далее.
- В электродинамике, где комплексные числа очень востребованы, мнимую единицу обозначают буквой j , чтобы не путать с силой тока.

Алгебраическая форма комплексного числа

Благодаря введению мнимой единицы, нам нет необходимости запоминать формулу (2), удобно представить комплексное число $z = (a, b)$ в алгебраической форме:

$$z = (a, b) = a + bi,$$

при этом все привычные операции с числами сохраняются, надо только помнить, что $i^2 = -1$.

Деление комплексных чисел в алгебраической форме

Определение 6. Число $\bar{z} = (a, -b) = a - bi$ называется комплексно-сопряженным к числу $z = (a, b) = a + bi$.

Легко проверить, что произведение комплексно-сопряженных чисел есть число вещественное:

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}.$$

Чтобы разделить на комплексное число, числитель и знаменатель дроби умножают на сопряженное к знаменателю число, тогда в знаменателе получится вещественное число, дальше производятся обычные действия. Поясним на примере:

$$\frac{2+3i}{-3+5i} = \frac{(2+3i)(-3-5i)}{(-3+5i)(-3-5i)} = \frac{9-19i}{(-3)^2-(5i)^2} = \frac{9-19i}{9+25} = \frac{9-19i}{34} = \frac{9}{34} - \frac{19}{34}i.$$

Возведение в степень комплексного числа в алгебраической форме

Прежде всего, найдем различные натуральные степени мнимой единицы:

$i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, \dots, i^{2025} = i^{2024+1} = i$, и т.д. Чтобы возвести комплексное число $z = a + bi$ в степень $n \in \mathbb{N}$, можно, например, воспользоваться формулой бинома Ньютона. Для извлечения корня натуральной степени также существуют способы, как это сделать для числа, заданного в алгебраической форме, но они очень громоздкие и неудобные. Для этого существуют другие, более подходящие способы.

3. Тригонометрическая форма комплексного числа

Изобразим комплексное число $z = a + bi$ на плоскости, как это было сделано на рисунке 1, расстояние от точки, изображающей комплексное число до нуля, обозначим r , а угол между радиусом-вектором этой точки и направлением вещественной оси обозначим φ (Рис. 2).

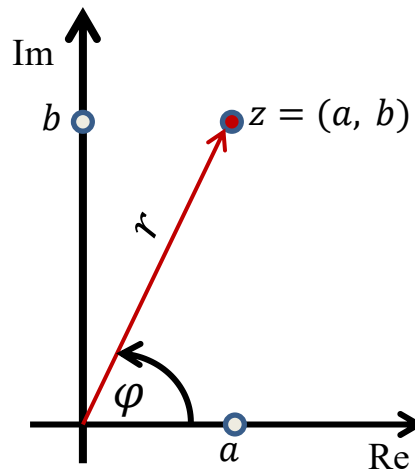


Рис. 2. Модуль и аргумент комплексного числа.

Определение 6. Число r называется модулем комплексного числа $z = a + bi$, а угол φ – аргументом числа $z = a + bi$.

Модуль числа обозначается так же, как прежде: $r = |z|$, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Что касается аргумента, то он определяется с точностью до $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Главным значением аргумента считается угол $\varphi \in [0, 2\pi)$ или $\varphi \in (-\pi, \pi]$ (в зависимости от договоренности). Мы будем считать главным значением аргумента угол $\varphi \in [0, 2\pi)$. Главное значение аргумента обозначается $\arg z$. Для нахождения аргумента можно использовать различные формулы:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}, \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

К сожалению, явно одной формулой выразить аргумент через вещественную и мнимую части числа не получится, поскольку на III четверти не работает ни одна из обратных тригонометрических функций.

Заметим также, что, зная модуль и аргумент комплексного числа, можно выразить его вещественную и мнимую части: $a = r \cos \varphi$, $b = r \sin \varphi$, а тогда

$$z = a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

последнее выражение и является тригонометрической формой комплексного числа.

Умножение и деление чисел в тригонометрической форме

Пусть есть два комплексных числа, заданные в тригонометрической форме:

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2),$$

найдем произведение этих чисел.

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)) = \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)), \end{aligned} \quad (3)$$

последнее равенство означает, что при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

Аналогично можно показать, что

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)),$$

то есть при делении модули делятся, а аргументы вычитаются.

Возведение комплексного числа в натуральную степень

Пользуясь формулой (3), можно вычислить, например, квадрат комплексного числа $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$:

$$z^2 = r \cdot r (\cos(\varphi + \varphi) + i \sin(\varphi + \varphi)) = r^2 (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi).$$

Методом математической индукции легко доказать формулу для возведения комплексного числа в любую натуральную степень.

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \text{ – первая формула Муавра.} \quad (4)$$

Извлечение корня натуральной степени из комплексного числа

Пусть есть число $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, корнем n -ой степени из числа z называется число $\zeta = \rho(\cos \psi + i \sin \psi)$, при возведении которого в степень n , получится число z .

$$\zeta^n = \rho^n (\cos n\psi + i \sin n\psi) = r (\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

последнее равенство означает, что

$$\begin{cases} \rho^n = r, \\ n\psi = \varphi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r}, \\ \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}. \end{cases}$$

Мы получили вторую формулу Муавра для корня степени n из комплексного числа в тригонометрической форме:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), k \in \mathbb{Z} \quad (5)$$

Замечания

- Не смотря на одинаковые обозначения для радикала, в левой и правой частях формулы (5) они имеют разный смысл. Радикал, стоящий в левой части – это комплексный корень, а радикал в правой части – это арифметический корень из неотрицательного числа, то есть число неотрицательное и, разумеется, вещественное.
- Всего существует n различных корней n -ой степени из комплексного числа. Чтобы найти все различные корни, достаточно вместо k в формуле (5) взять числа $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$.
- Если изобразить корни n -ой степени из комплексного числа, то мы получим точки, лежащие на окружности радиуса $\sqrt[n]{r}$ и являющиеся вершинами правильного n -угольника, вписанного в данную окружность (Рис. 3).

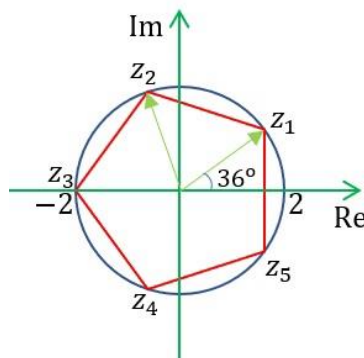


Рис. 3. $\sqrt[5]{32}$

4. Показательная форма комплексного числа.

Еще одна удобная для вычислений форма комплексного числа – показательная форма.

Введем обозначение: $e^{i\varphi} \stackrel{\text{def}}{=} \cos \varphi + i \sin \varphi$, тогда комплексное число, заданное в тригонометрической форме, можно будет представить в виде:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi}. \quad (6)$$

Замечание. Показательной формой удобно пользоваться, поскольку в этом случае, как и с обычной показательной функцией, при умножении аргументы складываются, при делении вычитаются, а при возведении в степень умножаются на показатель степени. Такая форма была предложена Леонардом Эйлером в 1740 году. Формулу $e^{i\varphi} \stackrel{\text{def}}{=} \cos \varphi + i \sin \varphi$ так и называют формулой Эйлера. Про число e мы будем подробно говорить в следующем разделе курса высшей математики.

Получим несколько красивых формул, также называемых формулами Эйлера, которые вытекают из (6).

$$e^{i\pi} = -1, \\ \cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Разработал доцент кафедры высшей математики М. В. Лагунова