

Раздел № 03 Комплексные числа и
многочлены

Тема № 02 Многочлены и рациональные дроби

Лекция № 12

Учебные вопросы:

1. Введение.
2. Линейное пространство многочленов с комплексными коэффициентами.
3. Умножение и деление многочленов.
4. Алгебраические уравнения и их корни.
5. Многочлены с вещественными переменными.
6. Рациональные дроби.

Литература

1. Сборник задач по математике в четырех частях. Под общей редакцией А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича
2. Б.П. Демидович. Краткий курс высшей математики.
3. А.Е. Умнов. Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

1. Введение

На предыдущей лекции мы познакомились с комплексными числами, которые необходимы прежде всего для решения алгебраических уравнений, к которым мы сейчас перейдем. Но прежде вспомним, что такое многочлены, причем коэффициенты многочлена и его переменная могут быть и комплексными.

2. Линейное пространство многочленов с комплексными коэффициентами.

Определение 1. Алгебраическое выражение

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_k z^{n-k} + \dots + a_{n-1} z + a_n, \quad (1)$$

где $n \in N_0, a_0 \neq 0$, называется многочленом, или полиномом от переменной z .

Числа $a_0, a_1, \dots, a_n \in C$ называются коэффициентами многочлена, при этом a_0 — старший коэффициент, a_n — свободный член. Число n называется степенью многочлена и часто обозначается $\deg P(z)$, $N_0 = N \cup \{0\}$, то есть многочлен имеет натуральную степень или степень, равную нулю. Переменная величина z также может быть комплексной.

Определение 2. Если все коэффициенты многочлена равны нулю, то такой многочлен называется нулевым. Степень нулевого многочлена не определена.

Замечание. Вспомните из предыдущего раздела нулевой вектор. Его направление также не определено, то есть можно говорить, что этот вектор имеет любое направление. Так же будет и с нулевым многочленом и его степенью.

Определение 3. Многочлены $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ и $Q(z) = b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m$ равны, если $\deg P(z) = \deg Q(z)$ и $a_i = b_i$ при $i = 0, 1, \dots, n$, то есть многочлены имеют одинаковую степень и соответствующие коэффициенты равны.

Линейные операции с многочленами

К линейным операциям относятся сложение и умножение на число из поля. В нашем случае полем чисел является C . В школьной программе к полям относились множества рациональных и вещественных чисел (Q, R) . Напомним, что полем является множество чисел, в котором определены сложение, умножение, причем выполняются все известные из школьного курса аксиомы, в частности, каждое число (кроме нейтрального элемента сложения, то есть числа 0) должно иметь противоположное и обратное.

Сумма и произведение многочлена на число определяется обычным образом, при этом $P(z) + Q(z) = T(z)$ — многочлен, $\deg T(z) \leq \max(\deg P(z), \deg Q(z))$, поскольку при сложении многочленов одинаковых степеней, старший член которых отличается знаком, получится многочлен меньшей степени. При умножении многочлена на число получим многочлен той же степени (даже если умножим на 0).

Введем в рассмотрение множество $P_n = \{P(z) : \deg P(z) \leq n\}$, это семейство всех многочленов с комплексными коэффициентами, степень которых не превышает n . Вспомните определение линейного пространства. Можно проверить, что P_n — линейное пространство.

3. Умножение и деление многочленов.

Умножение многочленов также проводится традиционным способом, при этом, очевидно, $\deg(P(z) \cdot Q(z)) = \deg P(z) + \deg Q(z)$.

Определение 4. Многочлен $P(z)$ делится на многочлен $Q(z)$ без остатка, если существует такой многочлен $S(z)$, что $P(z) = Q(z) \cdot S(z)$, при этом многочлены этого равенства традиционно называются так: $P(z)$ — делимое, $Q(z)$ — делитель, $S(z)$ —

частное.

Замечания

- $\deg P(z) = \deg Q(z) + \deg S(z)$.
- Деление осуществимо не всегда. Например, если $P(z) = z^2 - 1$, $Q(z) = z + 1$, то $z^2 - 1 = (z - 1)(z + 1)$, но если $P(z) = z^2 + 1$, то аналогичное равенство невозможно.

Определение 5. Разделить многочлен $P(z)$ на многочлен $Q(z)$ с остатком – это значит представить его в виде $P(z) = Q(z) \cdot S(z) + R(z)$, где $\deg R(z) < \deg Q(z)$, при этом многочлен $R(z)$ называется остатком от деления.

Замечания

- Делитель $Q(z)$ не должен быть нулевым многочленом.
- Если в остатке получается нулевой многочлен, значит многочлен $P(z)$ делится на $Q(z)$ без остатка.
- Разделив последнее равенство на ненулевой многочлен $Q(z)$, получим

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = S(z) + \frac{R(z)}{Q(z)} \quad (2)$$

Дроби $\frac{P(z)}{Q(z)}$, $\frac{R(z)}{Q(z)}$ называются рациональными дробями, при этом многочлен

$S(z)$ в выражении (2) называется целой частью, а рациональная дробь $\frac{R(z)}{Q(z)}$ – дробной частью.

Теорема 1. Пусть даны два многочлена: $P(z)$ и $Q(z)$, причем $Q(z)$ не нулевой многочлен, тогда существуют единственные многочлены $S(z)$ и $R(z)$, такие что выполняется равенство $P(z) = Q(z)S(z) + R(z)$, причем $\deg R(z) < \deg Q(z)$.

Замечания.

- Возможно, что многочлен $R(z)$ является нулевым, в этом случае осуществимо деление нацело.
- Доказательство данной теоремы проводится конструктивно, то есть оно содержит алгоритм деления многочлена на многочлен «уголком». Поясним этот алгоритм на конкретном примере.

Пример. Разделим многочлен $P(z) = z^4 - 6z^3 - z + 5$ на многочлен первой степени $Q(z) = z - 2$ «уголком» (Рис. 1.)

$$\begin{array}{r|l}
 z^4 - 6z^3 - z + 5 & z - 2 \\
 \underline{z^4 - 2z^3} & z^3 - 4z^2 - 8z - 17 \\
 -4z^3 & \\
 \underline{-4z^3 + 8z^2} & -8z^2 - z \\
 -8z^2 - z & \\
 \underline{-8z^2 + 16z} & -17z + 5 \\
 -17z + 5 & \\
 \underline{-17z + 34} & -29
 \end{array}$$

Рис. 1. Деление многочленов «уголком».

В результате деления мы получили равенства:

$$P(z) = z^4 - 6z^3 - z + 5 = (z - 2)(z^3 - 4z^2 - 8z - 17) + 29,$$

$$\frac{z^4 - 6z^3 - z + 5}{z - 2} = z^3 - 4z^2 - 8z - 17 + \frac{29}{z - 2}.$$

Схема Горнера

При делении многочлена $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ на многочлен первой степени $(z - c)$ удобно пользоваться схемой Горнера. Информация о коэффициентах делимого, делителя, частного и об остатке от деления хранится и получается в таблице, которая в общем виде может быть записана следующим образом:

	a_0	a_1	...	a_k	...	a_{n-1}	a_n
c	$a_0 + b_0$	$a_1 + c b_0 = b_1$	...	$a_k + c b_{k-1} = b_k$	...	$a_{n-1} + c b_{n-2} = b_{n-1}$	остаток $a_n + c b_{n-1}$

Во второй строке таблицы содержатся коэффициенты частного, степень которого на единицу меньше, чем у делимого, в самой последней ячейке второй строки находится остаток от деления, то есть некоторое число. Если в последней ячейке получилось число 0, то многочлен разделился без остатка. Есть еще одно полезное применение схемы Горнера, об этом будет сказано далее.

Тот же пример решим, используя схему Горнера.

	1	-6	0	-1	5
2	1	-4	-8	-17	-29

4. Алгебраические уравнения и их корни

Определение 6. Пусть есть многочлен степени n :

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_k z^{n-k} + \dots + a_{n-1} z + a_n,$$

уравнение $P(z) = 0$, или

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_k z^{n-k} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0, \quad (3)$$

называется алгебраическим уравнением степени n .

Определение 7. Число $c \in \mathbb{C}$ называется корнем уравнения (3) или корнем многочлена $P(z)$, если $P(c) = 0$.

Теорема 2. (Теорема Безу)

Остаток от деления многочлена $P(z)$ на линейный многочлен $(z - c)$ равен $P(c)$, где $c \in \mathbb{C}$ любое комплексное число.

Доказательство

Из теоремы 1 получим: $P(z) = (z - c)Q(z) + R(z)$, причем возможны два варианта:

$$\begin{cases} R(z) \equiv 0, \\ \deg R(z) < \deg(z - c) = 1, \end{cases} \Rightarrow R(z) = r \in \mathbb{C},$$

то есть в любом случае остаток от деления – некоторое число r , а в таком случае

$$P(c) = (c - c)Q(c) + r \Rightarrow r = P(c).$$

Следствие. Если c – корень многочлена $P(z)$, то многочлен делится на $(z - c)$ без остатка, то есть $P(z) = (z - c)Q(z)$.

Замечание. С помощью схемы Горнера можно найти значение многочлена в любой точке. Часто это бывает проще, чем вычислять значение многочлена напрямую.

Теорема 3. (Основная теорема алгебры.)

Пусть есть многочлен $P(z): \deg P(z) \geq 1$, тогда существует по крайней мере один (в общем случае комплексный) корень этого многочлена $c \in \mathbb{C}: P(c) = 0$.

Замечание. Эта теорема была доказана Карлом Фридрихом Гауссом (1777 –

1856), часто ее называют теоремой Гаусса. Доказательство ее довольно сложное – его дают в более полных курсах высшей алгебры, а часто и в других дисциплинах математики.

Следствие из теорем Гаусса и Безу.

Любой многочлен $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_k z^{n-k} + \dots + a_{n-1} z + a_n$, степень которого $\deg P(z) \geq 1$ имеет ровно n корней и может быть разложен на множители, то есть представлен в виде:

$$P(z) = a_0 (z - c_1)(z - c_2) \dots (z - c_n), \quad (4)$$

при этом справедливы следующие утверждения:

- разложение (4) единственно с точностью до перестановки сомножителей;
- среди корней многочлена $c_1, c_2, \dots, c_n$ могут встречаться одинаковые;
- других корней многочлен $P(z)$ не имеет.

Определение 8. Число $c \in \mathbb{C}$ называется корнем многочлена $P(z)$ кратности $k \in \mathbb{N}$, если $P(z) = (z - c)^k Q(z)$, причем $Q(c) \neq 0$.

5. Многочлены с вещественными коэффициентами.

В дальнейшем нам понадобятся многочлены с вещественными коэффициентами и вещественными переменными. Для таких многочленов мы будем обозначать переменную величины привычной буквой x .

Теорема 4. Пусть есть многочлен с вещественными коэффициентами:

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_k x^{n-k} + \dots + a_{n-1} x + a_n. \quad (5)$$

Если число $c = a + bi$ ($b \neq 0$) – корень многочлена (5) кратности k , то комплексно-сопряженное число $\bar{c} = a - bi$ также является корнем многочлена (5) кратности k .

Важное замечание.

Поскольку многочлен (5) делится без остатка на $(x - c)$ и на $(x - \bar{c})$, то он делится и на произведение этих линейных многочленов, то есть в разложении на множители будет множитель:

$$(x - c)(x - \bar{c}) = (x - a - bi)(x - a + bi) = ((x - a)^2 + b^2) = x^2 - 2ax + a^2 + b^2,$$

то есть в разложении на множители будет квадратный трехчлен с отрицательным дискриминантом. Из всего сказанного можно сделать следующий вывод.

Всякий многочлен с вещественными коэффициентами (5) можно разложить на множители следующим образом:

$$P(x) = a_0 (x - x_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (x - x_i)^{k_i} (x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_j x + q_j)^{m_j}, \quad (6) \quad x_1, x_2, \dots, x_i - \text{все}$$

различные вещественные корни многочлена;

$(x^2 + p_l x + q_l)$, где $p_l, q_l \in \mathbb{R}$, – квадратные трехчлены с отрицательными дискриминантами, отвечающие парам комплексно-сопряженных корней, при этом

$$\sum_{\alpha=1}^i k_\alpha + 2 \sum_{\beta=1}^j m_\beta = n.$$

Определение 9. Многочлены вида $(x - x_i)$, $x_i \in \mathbb{R}$ и $(x^2 + p_l x + q_l)$, где $p_l, q_l \in \mathbb{R}$, – квадратные трехчлены с отрицательными дискриминантами – называются неприводимыми над полем вещественных чисел.

Если многочлен неприводимый над полем вещественных чисел, то это означает, что дальше его раскладывать на множители без привлечения комплексных чисел не получится. Формула (6) означает, что всякий многочлен с вещественными коэффициентами можно разложить в произведение неприводимых многочленов.

6. Рациональные дроби.

Определение 10. Пусть есть два многочлена с вещественными коэффициентами:

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n, \deg P(x) = n, \text{ и}$$

$$Q(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \dots + b_{m-1} x + b_m, \deg Q(x) = m.$$

Рациональная дробь – это выражение вида: $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

➤ Если $n < m$, то дробь называется *правильной*.

➤ Если $n \geq m$, то дробь называется *неправильной*.

Если дробь неправильная, то можно воспользоваться теоремой о делении с остатком и представить дробь в виде суммы целой и дробной части:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}, \deg S(x) = n - m, \deg R(x) < \deg Q(x),$$

при этом, если дробь $\frac{R(x)}{Q(x)}$ или отсутствует, или является правильной.

Простейшие правильные дроби

Различают 4 типа простейших правильных дробей:

I. $\frac{A}{x-a}, a, A \in R$

II. $\frac{A}{(x-a)^k}, k \in N, k \geq 2$

III. $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}, M, N, p, q \in R, D = p^2 - 4q < 0$

IV. $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$

Теорема 5. Всякую правильную рациональную дробь можно представить в виде конечной суммы простейших дробей, причем это разложение единственно с точностью до перестановки слагаемых.

Общая формула для разложения выглядит довольно громоздко (Рис. 2), надо понимать, что при записи суммы простейших дробей следует взять все дроби типа I, II, III, IV, общий знаменатель которых равен знаменателю исходной дроби. Разумеется, прежде нужно разложить знаменатель исходной дроби на неприводимые множители.

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = & \frac{B_1^{(1)}}{(x-b_1)} + \frac{B_2^{(1)}}{(x-b_1)^2} + \dots + \frac{B_{\beta_1}^{(1)}}{(x-b_1)^{\beta_1}} + \dots + \frac{B_1^{(m)}}{(x-b_m)} + \frac{B_2^{(m)}}{(x-b_m)^2} + \dots + \frac{B_{\beta_m}^{(m)}}{(x-b_m)^{\beta_m}} + \\ & + \frac{M_1^{(1)}x + N_1^{(1)}}{(x^2 + p_1x + q_1)} + \frac{M_2^{(1)}x + N_2^{(1)}}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \dots + \frac{M_{\lambda_1}^{(1)}x + N_{\lambda_1}^{(1)}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{\lambda_1}} + \dots + \\ & + \frac{M_1^{(n)}x + N_1^{(n)}}{(x^2 + p_nx + q_n)} + \frac{M_2^{(n)}x + N_2^{(n)}}{(x^2 + p_nx + q_n)^2} + \dots + \frac{M_{\lambda_n}^{(n)}x + N_{\lambda_n}^{(n)}}{(x^2 + p_nx + q_n)^{\lambda_n}} \end{aligned}$$

Рис. 2. Общая формула разложения правильной дроби в сумму простейших дробей.

Приведем пример. Требуется разложить рациональную дробь в сумму простейших.

$$\begin{aligned} & \frac{2x^7 - 4x^5 + 3x^2 - 12}{x^3(x-5)^2(x+7)(x^2+3x+11)(x^2-4x+5)^4(x^2+7)^3} = i \\ & i \frac{A_1}{x^3} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x} + \frac{B_1}{(x-5)^2} + \frac{B_2}{x-5} + \frac{C}{x+7} + \frac{Dx+E}{x^2+3x+11} + \\ & + \frac{F_1x+G_1}{(x^2-4x+5)^4} + \frac{F_2x+G_2}{(x^2-4x+5)^3} + \frac{F_3x+G_3}{(x^2-4x+5)^2} + \frac{F_4x+G_4}{x^2-4x+5} + i \end{aligned}$$

$$\frac{+H_1x+I_1}{(x^2+7)^3} + \frac{H_2x+I_2}{(x^2+7)^2} + \frac{H_3x+I_3}{x^2+7}.$$

Большими латинскими буквами (с нижними индексами и без) обозначены неопределенные коэффициенты. В данном случае их 22. Эти коэффициенты находятся из линейной системы из 22 уравнений, которая имеет единственное решение. Чтобы получить эту систему, следует привести простейшие дроби к общему знаменателю и записать условие равенства двух многочленов, стоящих в числителе исходной дроби и получившейся рациональной дроби.

Разработал доцент кафедры высшей математики М. В. Лагунова