

Раздел № 04 Начала математического
анализа

Тема № 01 Вещественные числа

Лекция № 13

Учебные вопросы:

1. Введение.
2. Аксиомы сложения, умножения и порядка.
3. Аксиомы порядка. Аксиома о точной верхней грани.
4. Типы множеств в поле вещественных чисел R .

Литература

1. Сборник задач по математике в четырех частях. Под общей редакцией А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича
2. Б.П. Демидович. Краткий курс высшей математики.
3. Л.Д. Кудрявцев. Курс математического анализа.
4. Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин. Сборник задач по математическому анализу. Т. 1-3.

1. Введение

В настоящем разделе вводятся основные понятия математического анализа: функция, предел, непрерывность функции. Описание нового по сравнению с элементарной математикой действия – предельного перехода является центральным для всего раздела. Сначала это действие рассматривается в его простейшем варианте, для последовательностей чисел, затем применительно к функциям одного аргумента. С помощью операции предельного перехода в последующих разделах будут построены другие основные понятия математического анализа – производная, интеграл и т.п. Основанием для математического анализа функции одной вещественной переменной является, безусловно, понятие вещественного числа.

2. Аксиомы сложения и умножения.

Определение 1. Множество R вещественных чисел (действительных) чисел – это множество математических объектов, на котором установлены две операции: сложение и умножение, установлено отношение порядка и выполняется аксиома о точной верхней грани.

Далее мы остановимся на всех понятиях, о которых говорится в определении 1. Начнем с аксиом сложения и умножения. Но прежде надо понять, что мы называем суммой и произведением.

Определение 2. Для любых двух элементов $x, y \in R$ ставятся в соответствие числа, обозначаемые $x+y$ и $x \cdot y$ и соответственно называемые их суммой и произведением. Эти числа определяются единственным образом.

Замечание. Таблицы сложения и умножения, которые мы учили в школе, были не случайны. Невозможно доказать, например, что $2+3=5$ или $2 \cdot 2=4$. Это надо просто знать.

Аксиомы сложения

Для $\forall x, y, z \in R$ выполняются следующие аксиомы:

1. $x+y=y+x$ – коммутативность суммы;
2. $(x+y)+z=x+(y+z)$ – ассоциативность суммы;
3. $\exists 0 \in R: x+0=x$ – существование нейтрального элемента сложения;
4. $\exists (-x): x+(-x)=0$ – существование противоположного элемента.

Аксиомы умножения

Для $\forall x, y, z \in R$ выполняются следующие аксиомы:

5. $x \cdot y = y \cdot x$ – коммутативность произведения;
6. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ – ассоциативность произведения;
7. $\exists 1 \in R: 1 \cdot x = x$ – существование нейтрального элемента произведения;
8. $\forall x \neq 0 \exists x^{-1}: x \cdot x^{-1} = 1$ – существование обратного элемента.

Операции сложения и умножения связаны еще одной аксиомой:

9. $(x+y)z = xz + yz$ – дистрибутивность умножения относительно сложения.

Замечания

- Методом от противного можно доказать, что нейтральные элементы сложения и умножения единственны.
- Множество чисел с введенными выше аксиомами 1 – 9 является линейным пространством.
- Операции вычитания и деления определяются как операции, обратные к сложению и умножению. Например, разделить на число $x \neq 0$ это то же самое, что умножить на x^{-1} .
- После введения данных аксиом мы можем рассматривать множества

натуральных чисел N , целых чисел Z и рациональных чисел Q .

Определение 3.

- $N = \{1, 1+1=2, 2+1=3, \dots\}$
- $Z = N \cup \{0\} \cup \{-n : n \in N\}$
- $Q = \left\{ \frac{p}{q} : p \in Z, q \in N \right\}$

Можно проверить, что множества N и Z не удовлетворяют аксиомам 1 – 9. А множество уже Q удовлетворяет всем вышеперечисленным аксиомам. В таком случае говорят, что это есть поле чисел. Перейдем теперь к другим группам аксиом, которые выполняются в поле вещественных чисел.

3. Аксиомы порядка.

Определение 4. В множестве вещественных чисел R установлено отношение порядка, то есть для любых двух элементов $x, y \in R$ выполняется одно или оба отношения: $x \leq y$ или $y \leq x$.

Аксиомы порядка

Для $\forall x, y, z \in R$ выполняются следующие аксиомы:

10. $x \leq x$ — рефлексивность отношения меньше или равно;
11. $(x \leq y) \wedge (y \leq x) \Rightarrow x = y$ — антисимметричность;
12. $(x \leq y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ — транзитивность;
13. $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$ — связь порядка и сложения;
14. $(0 \leq x) \wedge (0 \leq y) \Rightarrow 0 \leq x \cdot y$ — связь порядка и умножения;
15. $0 \leq 1, 0 \neq 1$.

Замечания.

- Очевидно, если $x \leq y$, то можно записать $y \geq x$. Если $x \leq y, x \neq y$, то $x < y$, это означает, что x строго меньше y .
- В поле Q также выполняются все аксиомы порядка 10 – 15.
- В поле комплексных чисел C отношение порядка не установлено, так что все неравенства с комплексными числами $a+bi$, если $b \neq 0$, лишены смысла.
- До настоящего момента множества рациональных чисел и вещественных представляются совершенно одинаковыми. В чем же проблема? Почему понадобилось расширение понятия числа?

Определение 5. Множество $X \subset R$ ограничено сверху, если

$$\exists b \in R : x \leq b \text{ при } \forall x \in X. \quad (1)$$

Число b при этом называют верхней границей множества X .

Определение 6. Множество $X \subset R$ ограничено снизу, если

$$\exists a \in R : a \leq x \text{ при } \forall x \in X. \quad (2)$$

Число a при этом называют нижней границей множества X .

Определение 7. Множество $X \subset R$ ограничено, если оно ограничено снизу и сверху, то есть выполняются условия (1) и (2).

Замечания

- Очевидно, если множество ограничено сверху, то оно имеет бесконечно много верхних границ. Аналогично, множество, ограниченное снизу, имеет бесконечно много нижних границ.
- Если множество ограничено, то это равносильно тому, что

$$\exists c \in R : |x| \leq c \text{ для } \forall x \in X. \quad (3)$$

Вернемся теперь к вопросу о необходимости расширить понятие рационального

числа. Рассмотрим пример, с которым столкнулись еще в Древней Греции. Докажем, что число, равное длине квадрата со стороной, равной 1, не может быть выражено рациональным числом (Рис. 1). То есть, что $\sqrt{2} \notin Q$.

Доказательство проводится от противного. Пусть это не так, и число $\sqrt{2}$ можно представить в виде несократимой дроби:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \in Q \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p - \text{чётное число, то есть } p = 2k, k \in N,$$

$$(2k)^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 4k^2 = 2q^2 \Leftrightarrow q^2 = 2k^2 \Rightarrow q - \text{чётное число, то есть } q = 2m, m \in N,$$

и мы получили, что дробь $\frac{p}{q}$ сократима на 2, что противоречит нашему условию. $\sqrt{2}$ 1

Таким образом, у нас получилось, что числа $\sqrt{2}$ просто нет среди привычных рациональных чисел. И тем не менее, мы можем вычислить его с любой заданной точностью: $\sqrt{2} \approx 1,4, \sqrt{2} \approx 1,41, \sqrt{2} \approx 1,414, \sqrt{2} \approx 1,4142, \sqrt{2} \approx 1,41421 \dots$

Настало время сформулировать последнюю аксиому, чтобы завершить понятие вещественных чисел.

Аксиома о точной верхней грани

16. Всякое множество $X \subset R$ вещественных чисел, ограниченное сверху, имеет точную верхнюю грань, то есть выполняются следующие условия:

- $\forall x \in X \exists M \in R: x \leq M$ (M — верхняя граница множества);
- если b — другая верхняя граница X , то $M \leq b$ (M — наименьшая из верхних границ множества X).

Определение 8. Наименьшая верхняя граница множества называется точной верхней гранью или супремумом множества X обозначается $M = \sup X$.

Можно ввести аналогичное утверждение про точную нижнюю границу ограниченного снизу множества вещественных чисел, но это будет уже теорема.

Теорема. (О точной нижней границе)

Всякое множество $X \subset R$ вещественных чисел, ограниченное снизу, имеет точную нижнюю грань, то есть выполняются следующие условия:

- $\forall x \in X \exists m \in R: m \leq x$ (m — нижняя граница множества);
- если a — другая нижняя граница X , то $a \leq m$ (m — наибольшая из нижних границ множества X).

➤ **Определение 9.** Наибольшая нижняя граница множества называется точной нижней гранью или инфимумом множества X обозначается $m = \inf X$.

Вернемся к рассмотренному выше примеру с длиной диагонали квадрата.

Рассмотрим множество $X = \{x \in Q: x^2 \leq 2\}$. Очевидно, что множество X ограничено сверху, например, числом 2. X ограничено сверху $\Rightarrow \exists \sup X \in R$,

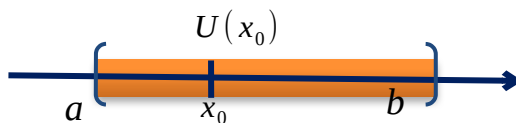
$$\sup X = \sqrt{2} \in R$$

4. Типы множеств в поле вещественных чисел R .

- $\{x \in R: a < x < b\} = (a, b)$ — интервал, или открытый промежуток;
- $\{x \in R: a \leq x \leq b\} = [a, b]$ — отрезок, сегмент, замкнутый промежуток;

- $\{x \in R: a < x \leq b\} = (a, b]$, $\{x \in R: a \leq x < b\} = [a, b)$ — полуинтервалы, или полусегменты;
- $\{x \in R: a < x\} = (a, +\infty)$, $\{x \in R: x < b\} = (-\infty, b)$ — бесконечные интервалы;
- $\{x \in R: a \leq x\} = [a, +\infty)$, $\{x \in R: x \leq b\} = (-\infty, b]$ — бесконечные полуинтервалы.
- $x_0 \in R, U(x_0) = (a, b) \subset R: x_0 \in (a, b)$ — окрестность точки x_0 (Рис. 2).

Рис. 2



- $U_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ — ε -окрестность точки x_0 (Рис. 3).

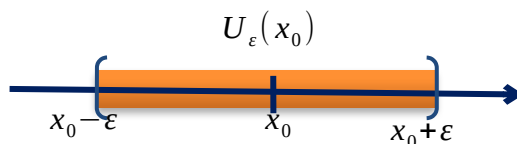


Рис. 3

- $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)$ — проколота ε -окрестность точки x_0 (Рис. 4).

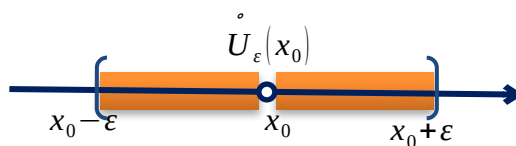


Рис. 4

Разработал доцент кафедры высшей математики М. В. Лагунова