Раздел № 04 Начала математического анализа

Тема № 02 Числовая последовательность и ее предел

Лекция № 14

Учебные вопросы:

1. Введение.
2. Понятие функции и числовой последовательности.
3. Предел числовой последовательности.
4. Свойства сходящихся последовательностей.
5. Бесконечно малые и бесконечно большие числовые последовательности.
6. Арифметические действия с пределами числовых последовательностей.

Литература

1. Сборник задач по математике в четырех частях. Под общей редакцией А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича
2. Б.П. Демидович. Краткий курс высшей математики.
3. Л.Д. Кудрявцев. Курс математического анализа.
4. Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин. Сборник задач по математическому анализу. Т. 1-3.

1. Введение

На прошлой лекции мы ввели понятие множества вещественных чисел и установили, в чем заключается различие между числами рациональными и вещественными. Переходим теперь к еще одному важнейшему понятию математического анализа – к понятию функции одной вещественной переменной, а также к понятию числовой последовательности. На этой лекции мы рассмотрим понятие предела числовой последовательности и изучим его свойства.

2. Понятие функции и числовой последовательности.

Понятие функции является основополагающим в математическом анализе, по этой причине дается определение, которое можно назвать описательным.

Определение 1. Говорят, что задана некоторая функция $f(x)$ одной вещественной переменной, если выполняются следующие 3 условия.

1) Пусть есть некоторое множество $X \subset \mathbb{R}$, называемое областью определения функции и обозначаемое $D(f)$.
2) Пусть есть также некоторое множество $Y \subset \mathbb{R}$, называемое множеством значений функции и обозначаемое $E(f)$.
3) Определено некое правило, по которому каждому элементу $x \in D(f)$ области определения ставится в соответствие единственный элемент $y \in E(f)$ из множества значений. В этом случае пишут $y = f(x)$. Переменная x называется аргументом функции, а величина y – значением функции в точке x.

По своей сути, функция – это один из типов отношений между x и y.

Существуют различные способы задания функции:

- аналитический способ – задание закона, устанавливающего связь между переменными x и y с помощью некоторой формулы;
- табличный способ – задание таблицы значений аргумента и соответствующих значений функции;
- графический способ – соответствие между аргументом и функцией задается с помощью графика;
- алгоритмический способ – задание функции с помощью алгоритма;
- задание функции словесным описанием.

Определение 2. Числовая последовательность – функция натурального аргумента.

В случае числовой последовательности аргументами являются натуральные числа, каждому натуральному числу n ставится в соответствие единственное вещественное число, которое обозначается x_n и называется общим членом числовой последовательности. Множество всех членов последовательности обозначается $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Способы изображения числовой последовательности

Существует два способа изображения числовой последовательности: с помощью точек на числовой прямой или строится график, представляющий из себя счетное множество точек на плоскости, координаты которых (n, x_n).

Пример

Изобразим числовую последовательность, заданную общим членом $x_n = \frac{2n}{n+1}$ двумя способами. Для этого найдем несколько членов последовательности и запишем полученные значения в таблицу (Рис. 1).

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_n	1	4/3	3/2	8/5	5/3	12/7	7/4	16/9	9/5	20/11

Рис. 1.

На рисунке 2 изобразим полученные значения числовой последовательности с помощью точек на числовой прямой.

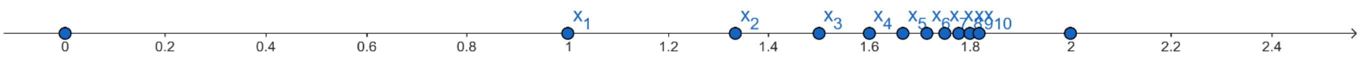

Рис. 2.

На рисунке 3 изобразим график числовой последовательности точками на плоскости.

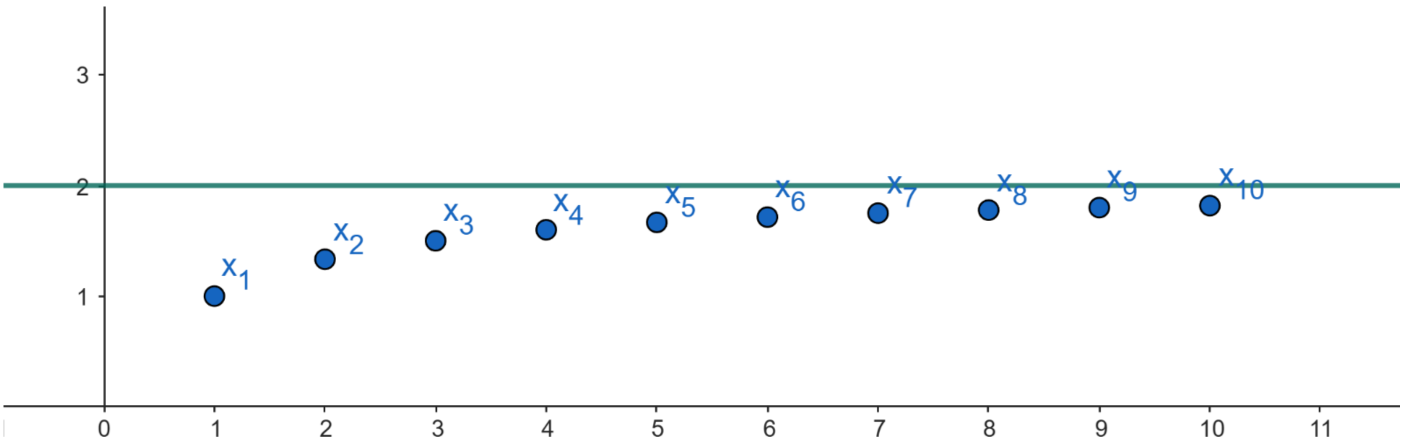

Рис. 3.

Как мы видим по рисункам 2 и 3, значения данной числовой последовательности $x_n = \frac{2n}{n+1}$ «бесконечно близко» приближаются к числу 2, причем чем больше номер n члена последовательности, тем меньше будет отклонение от числа 2. При этом очевидно, что при любом значении n значение $x_n = \frac{2n}{n+1} \neq 2$.

3. Предел числовой последовательности.

<u>Определение 2.</u> Число a называется пределом числовой последовательности с общим членом x_n, если для любого положительного числа ε существует такой номер $N(\varepsilon)$, зависящий от ε, при котором выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ для всех членов последовательности, номера которых удовлетворяют неравенству $n > N(\varepsilon)$.

В символической записи определение предела последовательности записывается так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon): n > N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon \qquad (1)$$

Последнее неравенство можно интерпретировать по-другому:

- $|x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$
- $|x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow x_n \in U_\varepsilon(a)$

Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся.

Вспомним предыдущий пример. По-видимому, последовательность $x_n = \frac{2n}{n+1}$ имеет пределом число 2. Докажем по определению, что это так.

Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$ и найдем номер $N(\varepsilon)$, начиная с которого $|x_n - 2| < \varepsilon$.

$$\left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{2n-2n-2}{n+1}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{-2}{n+1}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{n+1}{2} > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{2}{\varepsilon} - 1.$$

Нас интересует номер, начиная с которого выполняется неравенство $|x_n - 2| < \varepsilon$, то есть нужно найти натуральное число $N(\varepsilon)$. В качестве $N(\varepsilon)$ можно взять целую часть числа $\frac{2}{\varepsilon} - 1$, но, поскольку при больших значениях ε у нас не получится натурального числа, то достаточно взять $N(\varepsilon) = \max\left\{1,\ \left[\frac{2}{\varepsilon} - 1\right]\right\}$. Найдем, например, несколько значений для $N(\varepsilon)$ при различных значениях $\varepsilon > 0$. Если посмотреть на рис. 3, то нас интересует вопрос о том, начиная с какого номера точки, изображающие члены последовательность будут попадать в полосу, ограниченную двумя горизонтальными прямыми от $2 - \varepsilon$ до $2 + \varepsilon$.

$$N(1) = 1, N\left(\frac{1}{2}\right) = 3, N\left(\frac{1}{3}\right) = 5, N\left(\frac{1}{100}\right) = 199.$$

Теорема 1. (О единственности предела)

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a\\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = b\end{array}\right\} \Rightarrow a = b$$

Доказательство

Докажем от противного. Здесь и далее все доказательства будут проводиться в символической записи, с использованием определения предела (1).

Пусть $a \neq b$, например, $a < b$.

Возьмем $\varepsilon = \frac{b-a}{2} > 0$, тогда из (1) следует, что

$$\left.\begin{array}{l}\exists N_1(\varepsilon): n > N(\varepsilon) \Rightarrow x_n \in U_\varepsilon(a)\\ \exists N_2(\varepsilon): n > N(\varepsilon) \Rightarrow x_n \in U_\varepsilon(b)\end{array}\right\} \Longrightarrow \text{при } n > N(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_n \in U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b),$$

но при выбранном $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$ эти окрестности не пересекаются (Рис. 4), то есть бесконечно много значений членов последовательности принадлежат пустому множеству, что невозможно.

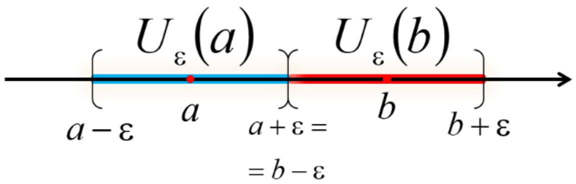

Рис. 4.

4. Свойства сходящихся последовательностей.

Теорема 2. (Ограниченность сходящейся последовательности).

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty} - \text{ограничена.}$$

Доказательство

Надо доказать, что существует такое число $M \in \mathbb{R}$: $|x_n| \leq M$ при $\forall n \in \mathbb{N}$.

Возьмем произвольное число ε, пусть это будет число 1. Тогда, поскольку последовательность сходится, то в соответствии с (1), найдется номер $N = N(1)$, начиная с которого $a - 1 < x_n < a + 1$. Остальные члены последовательности с номерами $1, 2, \dots, N$ этому двойному неравенству могут и не удовлетворять, но их значения – конечные величины, поэтому в качестве искомого числа M достаточно взять

$$M = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{N(\varepsilon)}|, \ |a - \varepsilon|, \ |a + \varepsilon|\}$$

Замечание. Обратная теорема неверна. Существуют ограниченные последовательности, не имеющие предела. Например, последовательность с общим членом $x_n = (-1)^n$.

Теорема 3. (Предельный переход в неравенстве)

$$\left.\begin{matrix} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \\ x_n \le y_n \ \forall n \in \mathbb{N} \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \le b$$

Доказательство

От противного. Пусть $a > b$. Возьмем $\varepsilon = \frac{a-b}{2} > 0$, согласно определению (1),

$$\left.\begin{matrix} \exists N_1(\varepsilon): n > N_1(\varepsilon) \Rightarrow x_n \in U_\varepsilon(a) \\ \exists N_2(\varepsilon): n > N_2(\varepsilon) \Rightarrow y_n \in U_\varepsilon(b) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{при } n > N(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_n \in U_\varepsilon(a) \\ y_n \in U_\varepsilon(b) \end{cases} \Rightarrow x_n > y_n \text{ при } n > N(\varepsilon), \text{ см. рисунок 5.}$$

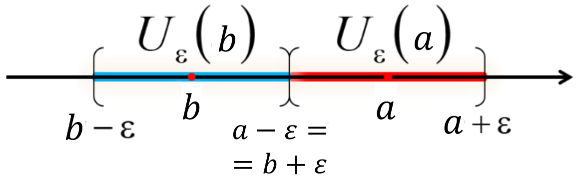

Рис. 5.

По условию теоремы $x_n \le y_n$ для любых n, и мы пришли к противоречию, которое и доказывает теорему.

Замечание. Строгие неравенства при переходе к пределу переходят в нестрогие.

Теорема 4. (Принцип сжатой переменной)

Пусть есть три числовые последовательности: $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, причем

$$\left.\begin{matrix} x_n \le y_n \le z_n \ \forall n \in \mathbb{N} \\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \exists \lim_{n\to\infty} y_n = a$$

Доказательство

Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$, согласно определению (1) $\exists N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)$, что

$$\left.\begin{matrix} n > N_1(\varepsilon) \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \\ n > N_2(\varepsilon) \Rightarrow a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon \end{matrix}\right\},$$

при $n > N(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\} \Rightarrow a - \varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < a + \varepsilon$.

Из последнего неравенства, заключаем, что при $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство: $a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon \Leftrightarrow |y_n - a| < \varepsilon$, то есть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

5. Бесконечно малые и бесконечно большие числовые последовательности

__**Определение 3.**__ Числовая последовательность $\{\alpha_n\}$ называется бесконечно малой, если $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0 \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon): n > N(\varepsilon) \Rightarrow |\alpha_n| < \varepsilon \tag{2}$$

Теорема 5. (Необходимое и достаточное условие существования предела)

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow x_n = a + \alpha_n, \text{где} \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0.$$

Для доказательства теоремы 5 достаточно записать определение предела и использовать определение бесконечно малой (2).

Свойства бесконечно малых числовых последовательностей

Теорема 6. (О сумме бесконечно малых числовых последовательностей)

Пусть $\{\alpha_n\},\ \{\beta_n\} -$ бесконечно малые $\Rightarrow \{\alpha_n + \beta_n\} -$ бесконечно малая.

Доказательство

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$.

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0 \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon > 0\ \exists N_1(\varepsilon): n > N_1(\varepsilon) \Rightarrow |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\beta_n = 0 \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon > 0\ \exists N_2(\varepsilon): n > N_2(\varepsilon) \Rightarrow |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

При $n > N(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\} \Rightarrow |\alpha_n + \beta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

Теорема 7. (О произведении бесконечно малой на ограниченную)

$$\left.\begin{array}{l}\{\alpha_n\} - \text{бесконечно малая} \\ \{\gamma_n\} - \text{ограниченная}\end{array}\right\} \Rightarrow \{\alpha_n\gamma_n\} - \text{бесконечно малая.}$$

Доказательство

Так как $\{\gamma_n\} -$ ограниченная, то $\exists M > 0$: $|\gamma_n| < M$ при $\forall n \in \mathbb{N}$.

Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0 \Rightarrow \exists N(\varepsilon): n > N(\varepsilon) \Rightarrow |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{M},$$

$$|\alpha_n\gamma_n| = |\alpha_n||\gamma_n| < \frac{\varepsilon}{M}\cdot M = \varepsilon \Rightarrow |\alpha_n\gamma_n| < \varepsilon$$

Следствия

- $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} -$ бесконечно малые $\Rightarrow \{\alpha_n\beta_n\} -$ бесконечно малая.
- $\{x_n\} -$ сходящаяся $\Rightarrow \{\alpha_n x_n\} -$ бесконечно малая.

<u>Определение 4.</u> Числовая последовательность $\{y_n\}$ называется бесконечно большой, если

$$\forall M > 0\ \exists N(M) \in \mathbb{N}: n > N(M) \Rightarrow |y_n| > M \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \lim_{n\to\infty} y_n = \infty$$

Замечания

- $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty \ \Leftrightarrow\ \forall M > 0\ \exists N(M) \in \mathbb{N}: n > N(M) \Rightarrow y_n > M$
- $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty \ \Leftrightarrow\ \forall M > 0\ \exists N(M) \in \mathbb{N}: n > N(M) \Rightarrow y_n < -M$

Теорема 8. (О связи бесконечно малых и бесконечно больших числовых последовательностей)

$\{x_n\} -$ бесконечно малая, $x_n \ne 0\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \left\{\frac{1}{x_n}\right\} -$ бесконечно большая;

$\{y_n\} -$ бесконечно большая, $y_n \ne 0\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \left\{\frac{1}{y_n}\right\} -$ бесконечно малая.

Доказательство. Докажем первую часть теоремы.

Возьмем $\forall M > 0$, пусть $\varepsilon = \dfrac{1}{M}$.

$\{x_n\} -$ бесконечно малая $\Longrightarrow \exists N(\varepsilon): n > N(\varepsilon) \Longrightarrow |x_n| < \varepsilon,$

$$|x_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{x_n}\right| > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow |y_n| > M \text{ при } n > N\left(\frac{1}{M}\right)$$

6. Арифметические действия с пределами числовых последовательностей

Теорема 9.

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a\\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c}\exists \lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b\\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = ab\\ \text{Если } b \neq 0, \text{то } \exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}\end{array}\right.$$

Доказательство

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow x_n = a + \alpha_n, \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0;$

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \Leftrightarrow x_n = b + \beta_n, \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0.$

$x_n + y_n = (a + \alpha_n) + (b + \beta_n) = a + b + (\alpha_n + \beta_n)$, то поскольку сумма бесконечно малых есть бесконечно малая, по теореме 5, предел суммы равен сумме пределов. Аналогично доказывается теорема о пределе произведения.

Чтобы доказать, что предел частного равен частному пределов, покажем, что разность $\dfrac{x_n}{y_n} - \dfrac{a}{b}$ есть бесконечно малая величина.

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{bx_n - ay_n}{by_n} = \frac{b(a + \alpha_n) - a(b + \beta_n)}{by_n} = \frac{1}{by_n}(b\alpha_n - ab_n).$$

Докажем, что $\dfrac{1}{by_n}$ – ограниченная.

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = 0 \Rightarrow \exists N: |\beta_n| < \frac{|b|}{2} \text{ при } n > N,$$

$$|y_n| = |b + \beta_n| \geq |b| - |\beta_n| \geq \tfrac{|b|}{2} \text{ при } n > N, \left|\frac{1}{by_n}\right| = \frac{1}{|b||y_n|} \leq \frac{1}{\frac{|b||b|}{2}} = \frac{2}{|b|^2},$$

$$\left|\frac{1}{by_n}\right| \leq \max\left\{\frac{1}{|b||y_1|}, \frac{1}{|b||y_2|}, \ldots, \frac{1}{|b||y_N|}, \frac{2}{|b|^2}\right\}$$

Замечание. При вычислении пределов числовых последовательностей используются теоремы 5 и 8. Есть несколько видов неопределенностей, которые встречаются при вычислении пределов:

$$[\infty - \infty], [0 \cdot \infty], \left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right], [1^\infty], [\infty^0], [0^0].$$

С тремя последними типами неопределенностей мы встретимся в последующих лекциях, для первых четырех случаев ответ может быть дан только в том случае, когда мы избавимся от неопределенности. Про это будет рассказано на практических занятиях.

Разработал доцент кафедры высшей математики М. В. Лагунова