

Раздел № 04 Начала математического
анализа

Тема № 03 Предел монотонной последовательности.

Число e .

Лекция № 15

Учебные вопросы:

1. Введение.
2. Метод математической индукции.
3. Предел монотонной последовательности.
4. Число e .

Литература

1. Сборник задач по математике в четырех частях. Под общей редакцией А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича
2. Б.П. Демидович. Краткий курс высшей математики.
3. Л.Д. Кудрявцев. Курс математического анализа.
4. Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин. Сборник задач по математическому анализу. Т. 1-3.

1. Введение

Предыдущая лекция была посвящена числовым последовательностям, их пределам и свойствам пределов. На этой лекции мы разберем один из широко применимых методов доказательства – методом математической индукции, а также рассмотрим класс монотонных последовательностей. Сформулируем и докажем теорему Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности и на основании этой теоремы введем одну из важнейших постоянных, имеющую огромное значение во всех дисциплинах, в которых используется математический аппарат. Речь идет о числе e .

2. Метод математической индукции.

Пусть есть некоторое математическое высказывание $T(n)$, зависящее от натурального числа $n \in \mathbb{N}$. Это может быть, например, формула для суммы квадратов:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

которая может пригодиться при нахождении предела числовой последовательности. Доказательство методом математической индукции проводится в два этапа.

- **База для индукции.** Проверяется истинность утверждения с номером 1, то есть истинность $T(1)$.
- **Индукционный переход.** Доказывается, что если верно утверждение с номером k , то верно и утверждение с номером $k+1$, то есть $T(k) \Rightarrow T(k+1)$.

Методом математической индукции докажем неравенство, которое нам пригодится в дальнейшем.

Теорема 1. (Неравенство Бернулли)

$\forall a \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство:

$$(1+a)^n \geq 1+na \quad (1)$$

Доказательство

База для индукции. Пусть $n = 1$, проверим, что неравенство (1) выполняется:

$$(1+a)^1 = 1+a \geq 1+a - \text{истина.}$$

Индукционное предположение. Пусть неравенство (1) выполняется при $n = k$, докажем, что оно будет справедливо и для $n = k+1$.

$$\begin{aligned} (1+a)^{k+1} &\stackrel{?}{\geq} 1+(k+1)a - \text{проверим, что это так.} \\ (1+a)^{k+1} &= (1+a)^k(1+a) \geq (1+ka)(1+a) = 1+ka+a+ka^2 = \\ &= 1+(k+1)a+ka^2 \geq 1+(k+1)a \end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали наличие базы для индукции и обосновали законность индукционного перехода. Это значит, что неравенство (1) верно для $\forall n \in \mathbb{N}$.

Замечание. Методом математической индукции можно доказать также формулу бинома Ньютона:

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2 \cdot 1} a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} a^{n-3}b^3 + \\ &+ \dots + \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} a^{n-k}b^k + \dots + b^n, \end{aligned}$$

хотя, это не самый удобный способ. Но формула сама по себе полезная – мы ее непременно докажем в следующем разделе.

3. Предел монотонной последовательности.

Определение 1. Числовая последовательность называется возрастающей, если $x_{n+1} \geq x_n$ при $\forall n \in \mathbb{N}$. Если знак неравенства строгий, то говорят, что последовательность строго возрастает.

Определение 2. Числовая последовательность называется убывающей, если

$x_{n+1} \leq x_n$ при $\forall n \in \mathbb{N}$. Если знак неравенства строгий, то говорят, что последовательность строго убывает.

Во всех случаях, когда последовательность возрастает или убывает, строго или нестрого, последовательности называются монотонными.

Теорема 2. (Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности)

- $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — возрастает и ограничена сверху $\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup \{x_n\}$.
- $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — убывает и ограничена снизу $\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf \{x_n\}$.

Доказательство

Докажем первую часть теоремы, вторая часть доказывается аналогично. На рисунке 1 изображена возрастающая числовая последовательность, ограниченная сверху числом M .

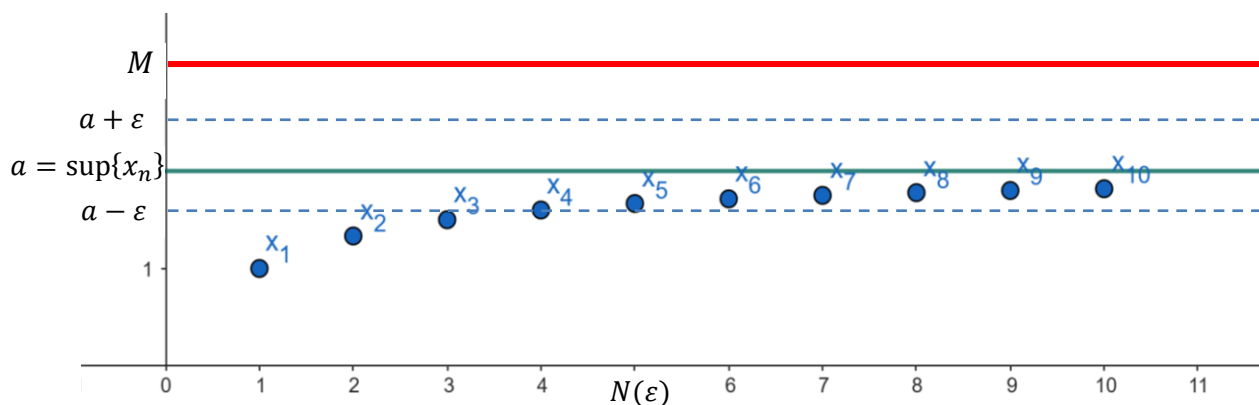


Рис. 1.

Так как множество значений числовой последовательности $\{x_n\}$ ограничено сверху, то по аксиоме о точной верхней грани существует $\sup \{x_n\} = a$. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$, тогда $a - \varepsilon$ уже не является верхней границей множества $\{x_n\}$, поскольку $a - \varepsilon < a$, но a — наименьшая из всех верхних границ. Тогда $\exists N(\varepsilon)$ (см. Рис.1), для которого $x_{N(\varepsilon)} > a - \varepsilon$, а поскольку последовательность возрастающая, то и все следующие ее члены с большими номерами также будут удовлетворять этому неравенству, то есть

$$\forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow a - \varepsilon < x_N < x_n < a < a + \varepsilon.$$

Мы показали, что $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon): n > N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$, это и означает, что

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a = \sup \{x_n\}.$$

4. Число e .

Теорема 3.

Числовая последовательность $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ сходится, то есть $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2$.

Доказательство

Используем неравенство Бернулли (1):

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2.$$

Удобно ввести вспомогательную последовательность $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$.

Покажем, что последовательность $\{y_n\}$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $\{y_n\}$ убывающая;
2. $y_n \geq 2$.

$$\begin{aligned}
1. \quad y_n &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} > 0, \text{ пусть } n > 1 \Rightarrow y_{n-1} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n > 0; \\
\frac{y_{n-1}}{y_n} &= \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{n^{n+1} n^{n+1}}{(n-1)^{n+1} (n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n-1}{n} = \\
&= \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} = \left(\frac{(n^2-1)+1}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} \geq \\
&\geq \left(1 + (n+1) \cdot \frac{1}{n^2-1}\right) \cdot \frac{n-1}{n} = 1.
\end{aligned}$$

Здесь мы также воспользовались неравенством Бернулли.

Мы получили, что $\frac{y_{n-1}}{y_n} \geq 1 \Leftrightarrow y_{n-1} \geq y_n$ при $n > 1$, т.е. $\{y_n\}$ – убывающая.

$$2. \quad y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = x_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq x_n \geq 2, \text{ т.е. } \{y_n\} \text{ ограничена снизу, числом } 2.$$

Поскольку $\{y_n\}$ убывает и ограничена снизу, то по теореме Вейерштрасса она имеет предел, причем $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \geq 2$.

$$x_n = \frac{y_n}{1 + \frac{1}{n}}, \text{ поскольку } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1,$$

то по теореме о пределе частного $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \geq 2$.

Определение 3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, то есть этот предел и называется числом e .

Замечания

- Число e иррациональное, его нельзя представить в виде бесконечной периодической дроби.
- Число e можно вычислить с любой степенью точности – для этого есть разные способы. Самый неудобный, пожалуй, это вычислять значения $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ при больших значениях n .
- $e \approx 2,718281828459045 \dots$
- Именно об этом числе e мы говорили, когда разбирали показательную форму комплексного числа.
- Функция $y = e^x$ называется экспонентой. Ее график изображен на рисунке 2.
- Логарифм по основанию e называется натуральным логарифмом и обозначается $\ln x$. График функции $y = \ln x$ изображен на рисунке 3.

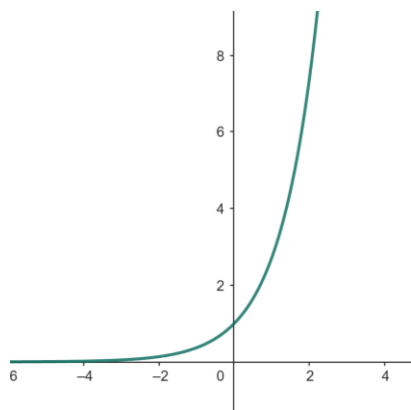


Рис. 2.

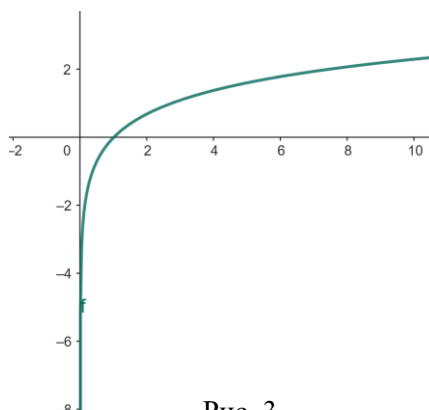


Рис. 3.

Разработал доцент кафедры высшей математики М. В. Лагунова