ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский
политехнический университет
Петра Великого

Раздел № 04 Начала математического анализа

Тема № 03 Предел функции.

Лекция № 16

Учебные вопросы:

1. Введение.
2. Два определения предела функции.
3. Свойства пределов функции.
4. Односторонние пределы.
5. Бесконечные пределы и пределы на бесконечности.

Литература

1. Сборник задач по математике в четырех частях. Под общей редакцией А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича
2. Б.П. Демидович. Краткий курс высшей математики.
3. Л.Д. Кудрявцев. Курс математического анализа.
4. Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин. Сборник задач по математическому анализу. Т. 1-3.

1. **Введение**

От пределов числовой последовательности перейдем к пределу функции. Будут даны два разных определения предела функции – так сложилось исторически. Но, поскольку это определения одного и того же понятия, то надо будет доказать теорему об эквивалентности определений. В зависимости от ситуации, иногда удобно пользоваться одним определением, а в других случаях - вторым.

2. **Два определения предела функции.**

Прежде чем давать определение предела, рассмотрим пример на построение графика функции $f(x)=\frac{x^2+x-2}{x-1}$. Начинать надо, как обычно, области определения функции: $D(f)=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$. Графиком функции будет прямая линия с одной выколотой точкой (1; 3) (Рис.1). Значение функции в точке $x=1$ не определено, однако чем ближе будет аргумент к 1, тем меньше значение функции отличается от числа 3. Эта ситуация приводит нас к важнейшему понятию математического анализа – пределу функции.

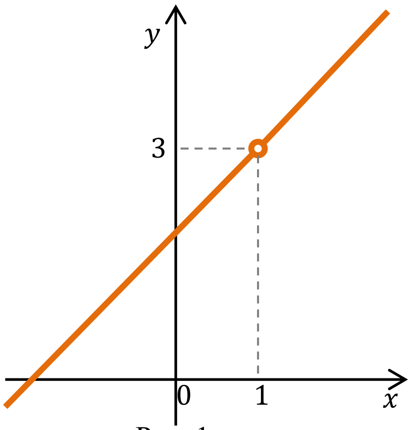

Рис. 1.

Определение 1. (Определение предела функции по Гейне)

Число a является пределом функции $f(x)$ при $x\to x_0$, если для любой числовой последовательности $\{x_n\}$ из области определения функции $f(x)$, стремящейся к x_0 и не принимающей значение x_0, соответствующая числовая последовательность значений функции стремится к числу a (Рис.2.).

В символической записи определение по Гейне выглядит так:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a \overset{\text{def}\,1}{\Leftrightarrow} \forall\{x_n\}\colon \left.\begin{matrix} 1)\ \{x_n\}\subset D(f) \\ 2)\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \\ 3)\ x_n\neq x_0\ \forall n\in\mathbb{R} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} f(x_n)=a. \tag{1}$$

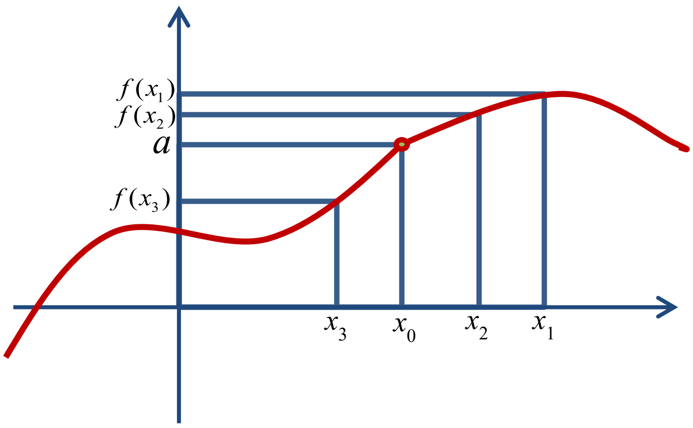

Рис. 2.

Следующее определение дадим только в символической форме.

Определение 2. (Определение предела по Коши)

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a \overset{\text{def}\,2}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)\colon 0<|x-x_0|<\delta(\varepsilon)\Rightarrow|f(x)-a|<\varepsilon \tag{2}$$

На рисунке 3 изображена суть определения предела по Коши. На языке окрестностей можно интерпретировать определение 2 следующим образом:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)\colon x\in\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)\Rightarrow f(x)\in U_\varepsilon(a).$$

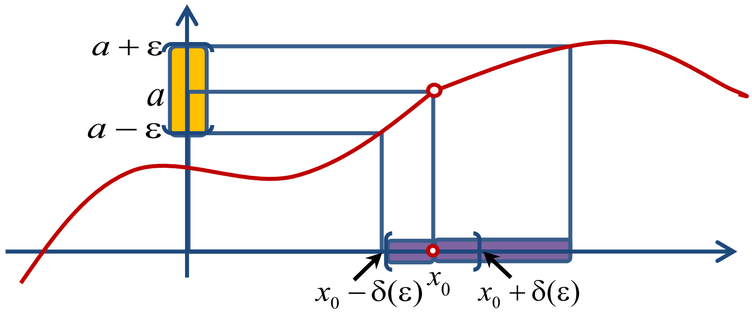

Рис. 3.

Теорема 1. (Эквивалентность определений предела)
Определения предела функции по Гейне и по Коши эквивалентны, то есть

$$(1) \Leftrightarrow (2).$$

Доказательство

1) Докажем, что из определения по Коши следует определение по Гейне, (2) ⇒ (1).
Возьмем $\forall\{x_n\}$, удовлетворяющую условиям 1), 2), 3), и покажем, что

$$\exists \lim_{n\to\infty} f(x_n) = a.$$

Зафиксируем $\forall\varepsilon > 0$, поскольку справедливо условие (2), имеем:

$$\exists\delta(\varepsilon): 0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \Longrightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Longrightarrow \exists N\big(\delta(\varepsilon)\big): n > N\big(\delta(\varepsilon)\big) \Longrightarrow 0 < |x_n - x_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x_n) - a| < \varepsilon.$$

Мы показали, что

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) = N\big(\delta(\varepsilon)\big): n > N(\varepsilon) \Longrightarrow |f(x_n) - a| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = a.$$

2) Докажем теперь, что из определения по Гейне следует определение по Коши, то есть $(1) \Rightarrow (2)$. Воспользуемся методом доказательства от противного. Для этого нам надо составить отрицание определения 2.

$$\neg(\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon): 0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists\varepsilon_0 > 0:\ \forall\delta\ \exists\tilde{x}: 0 < |\tilde{x} - x_0| < \delta,\ \text{НО}\ |f(\tilde{x}) - a| \ge \varepsilon_0 \tag{3}$$

Пусть $\delta_1 = 1,\ \delta_2 = \dfrac{1}{2}, \dots,\ \delta_n = \dfrac{1}{n}, \dots$

Для каждого значения δ_n найдем $\tilde{x}_n$:

$$0 < |\tilde{x}_n - x_0| < \delta_n = \frac{1}{n},\ \text{причем}\ |f(\tilde{x}_n) - a| \ge \varepsilon_0.$$

Пусть $n \to \infty \Longrightarrow \delta_n = \dfrac{1}{n} \to 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{x}_n = x_0.$

Итак, мы нашли числовую последовательность $\{\tilde{x}_n\}$, удовлетворяющую всем трем условиям определения Гейне, для которой $|f(\tilde{x}_n) - a| \ge \varepsilon_0$ при $\forall n \in \mathbb{N}$, это означает, что либо последовательность $\{f(\tilde{x}_n)\}$ не имеет предела, либо предел существует, но не равен числу a. В любом случае, мы имеем дело с противоречием, которое и доказывает вторую часть теоремы.

3. Свойства пределов функции.

Используя определение предела по Гейне, можно перенести ранее доказанные теоремы для пределов числовых последовательностей на случай пределов функций. Приведем без доказательства несколько таких теорем.

Теорема 2. (О единственности пределе функции)
Если существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, то он единственный.

Теорема 3. (Об арифметических операциях над пределами)

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a\\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c}\exists \lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)\pm g(x)\big) = a\pm b\\ \exists \lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = a\cdot b\\ \text{Если } b\neq 0, \text{то } \exists \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}\end{array}\right.$$

Теорема 4. (Принцип сжатой переменной)

$$\left.\begin{array}{r}f(x)\le g(x)\le h(x)\ \forall x\in \overset{\circ}{U}(x_0)\\ \exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = a\end{array}\right\} \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a$$

4. Односторонние пределы.

Начнем с примера нахождения односторонних пределов функции. Рассмотрим функцию $f(x) = \begin{cases}(x-1)^2, & x\le 1,\\ x, x>1,\end{cases}$ график которой изображен на рисунке 4. Данная функция не имеет предела в точке $x_0 = 1$, но при стремлении к 1 слева значение функции стремится к 0, а справа – к числу 1. В этом случае пишут $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = 1$ и говорят о наличии предела слева и справа, соответственно. Как и в случае обычного предела, можно дать определения односторонних пределов по Гейне и по Коши.

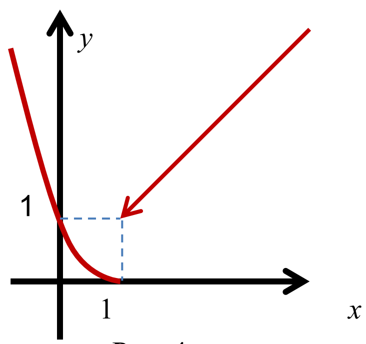

Рис. 4.

<u>Определение 3.</u> Определения односторонних пределов.

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = a \overset{\text{def1}}{\Leftrightarrow} \forall\{x_n\}: \left.\begin{array}{l}1)\ \{x_n\}\subset D(f)\\ 2)\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0\\ 3)\ x_n < x_0\ \forall n\in\mathbb{R}\end{array}\right\} \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$$

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = a \overset{\text{def1}}{\Leftrightarrow} \forall\{x_n\}: \left.\begin{array}{l}1)\ \{x_n\}\subset D(f)\\ 2)\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0\\ 3)\ x_n > x_0\ \forall n\in\mathbb{R}\end{array}\right\} \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$$

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = a \overset{\text{def 2}}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon): 0 < x_0 - x < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x)-a| < \varepsilon$$

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = a \overset{\text{def2}}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon): 0 < x - x_0 < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x)-a| < \varepsilon$$

Для односторонних пределов слева и справа пользуются следующими обозначениями:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0-0),\ \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0+0).$$

Теорема 5. (Необходимое и достаточное условие существования предела)

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\exists f(x_0-0),\\ \exists f(x_0+0),\\ f(x_0-0) = f(x_0+0) = a.\end{array}\right.$$

Для доказательства теоремы 5 достаточно записать определения по Коши для предела функции и для односторонних пределов.

5. Бесконечные пределы и пределы на бесконечности.

Перейдем теперь к случаям, если $x \to \pm\infty$, или когда пределом функции является бесконечность. Таких определений можно составить очень много. Остановимся на некоторых из них.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \overset{\text{def1}}{\Leftrightarrow} \forall\{x_n\}: \left.\begin{matrix} 1)\ \{x_n\} \subset D(f) \\ 2)\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty \end{matrix}\right\} \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = a \overset{\text{def2}}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon): |x| > \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \overset{\text{def2}}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon): 0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow f(x) < -\varepsilon$$

Заметим, что в последнем случае произвольное число ε может быть сколь угодно большим, хотя обычно мы считаем, что это число сколь угодно малое.

Разработал доцент кафедры высшей математики М. В. Лагунова