Раздел № 04 Начала математического анализа

Тема № 04 Непрерывность функции.

Лекция № 17

Учебные вопросы:

1. Введение.
2. Непрерывность функции в точке.
3. Классификация точек разрыва.
4. Свойства непрерывных функций.
5. Непрерывность на промежутке.
6. Непрерывность основных элементарных функций.
7. Основные теоремы о функциях, непрерывных на отрезке.

Литература

1. Сборник задач по математике в четырех частях. Под общей редакцией А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича
2. Б.П. Демидович. Краткий курс высшей математики.
3. Л.Д. Кудрявцев. Курс математического анализа.
4. Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин. Сборник задач по математическому анализу. Т. 1-3.

1. Введение

На предыдущей лекции мы говорили о пределах функции в точке и об односторонних пределах. Перейдем теперь к изучению понятий непрерывности функции в точке, на интервале и на отрезке. Рассмотрим также типы точек разрыва функции. Кроме того, сформулируем и частично докажем важнейшие теоремы о функциях, непрерывных на отрезке.

2. Непрерывность функции в точке.

Вспомним пример, который был приведен на предыдущей лекции до определения предела функции. Мы рассматривали функцию $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-1}$, график которой изображен на рисунке 1. На этом графике изображена прямая линия с одной выколотой точкой. Если бы такой точки не было, то логично было бы говорить о функции, непрерывной в точке $x_0 = 1$.

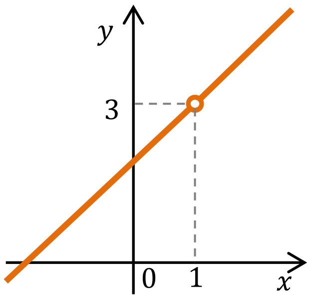


Рис. 1.

__Определение 1.__ Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x = x_0$, если

- $D(f) \supset U(x_0)$,
- $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. (1)

Замечание. С учетом теоремы о необходимом и достаточном условии существования предела, можно заключить, что

$$f(x) \text{ непрерывна в точке } x_0 \Leftrightarrow f(x_0 - 0) = f(x_0) = f(x_0 + 0) \quad (2)$$

__Определение 2.__ Пусть $\Delta x \in \mathbb{R}$: $\Delta x \neq 0$, и промежуток с концами $x_0, x_0 + \Delta x$ целиком лежит в области определения функции $f(x)$. Приращением функции $f(x)$ в точке x_0, вызванным приращением аргумента Δx, называется величина (Рис. 2):

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

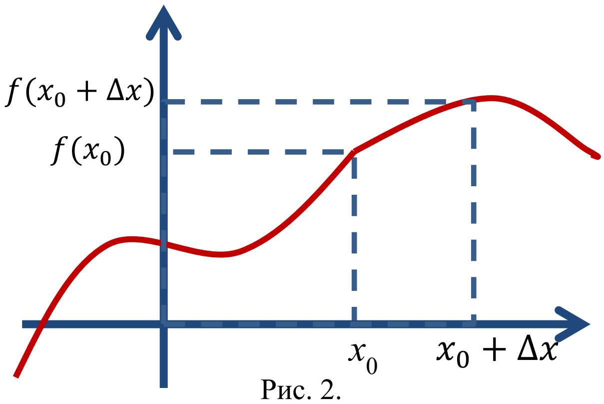


Рис. 2.

Замечания

- Приращение аргумента, равно как и приращение функции, может быть отрицательным.
- Приращение функции зависит от двух величин – от значения аргумента x_0 и приращения аргумента $\Delta x \in \mathbb{R}$.

Теорема 1. (Необходимое и достаточное условие непрерывности функции)

$$f(x) \text{ непрерывна в точке } x_0 \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0.$$

Доказательство

Пусть $x = x_0 + \Delta x$,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0 \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta x\to 0}(f(x)-f(x_0))=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)-f(x_0)=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

3. Свойства непрерывных в точке функций.

Теорема 2. (Об арифметических действиях с непрерывными функциями)

$$f(x),\ g(x) \text{ непрерывны в } x_0 \Rightarrow \begin{cases} f(x)\pm g(x), \\ f(x)\cdot g(x), \\ \text{если } g(x_0)\neq 0, \text{то } \frac{f(x)}{g(x)} \end{cases} \text{непрерывны в точке } x_0.$$

Для доказательства этой теоремы достаточно воспользоваться определением непрерывности в точке и теоремой об арифметических действиях с пределами.

Теорема 3. (О непрерывности сложной функции)

$$\left.\begin{array}{l} z=\varphi(x) \text{ непрерывна в } x_0, \\ y=f(z) \text{ непрерывна в } z_0=\varphi(x_0), \\ \exists y=f\big(\varphi(x)\big)=F(x)-\text{сложная функция,} \end{array}\right\} \Rightarrow F(x) \text{ непрерывна в } x_0.$$

Доказательство

Воспользуемся определением предела по Гейне.

Возьмем $\forall\{x_n\}$: $\begin{array}{l} 1)\ \{x_n\}\subset D(\varphi), \\ 2)\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0. \end{array}$ $z_n=\varphi(x_n)$, т.к. $z=\varphi(x)$ непрерывна в x_0, то

$$\lim_{n\to\infty} z_n=\lim_{n\to\infty}\varphi(x_n)=\varphi\left(\lim_{n\to\infty}x_n\right)=\varphi(x_0)=z_0,$$

поскольку $y=f(z)$ непрерывна в $(\cdot)\ z_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=f(z_0)$, то есть

$\lim\limits_{n\to\infty} f(\varphi(x_n))=f(z_0)=f(\varphi(x_0))$, или $\lim\limits_{n\to\infty} F(x_n)=F(x_0)$, а это и означает, что сложная функция $F(x)=f\big(\varphi(x)\big)$ непрерывна в точке x_0.

4. Классификация точек разрыва.

Пусть функция $f(x)$ определена как минимум в $\mathring{U}(x_0)$. Как мы знаем из определения непрерывности функции в точке x_0, выполняется условие (2).

<u>Определение 3.</u> Точка x_0, в которой не выполняется условие (2), называется точкой разрыва функции $f(x)$, то есть в точке разрыва

$$\neg(f(x_0-0)=f(x_0)=f(x_0+0)) \tag{3}$$

Рассмотрим различные случаи, когда не выполняется условие (2).

1. $f(x_0-0)=f(x_0+0)$, причем возможны 2 варианта: $\left[\begin{array}{l} \nexists f(x_0), \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0). \end{array}\right.$

В этом случае x_0 называется точкой устранимого разрыва функции $f(x)$. В случае устранимого разрыва можно доопределить функцию по непрерывности, это значит, что функция $g(x)=\begin{cases} f(x), x\neq x_0, \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x), \end{cases}$ будет непрерывна в точке x_0.

2. $f(x_0-0)\neq f(x_0+0), \begin{cases} f(x_0-0)=A\in\mathbb{R}, \\ f(x_0+0)=B\in\mathbb{R}, \\ A\neq B. \end{cases}$

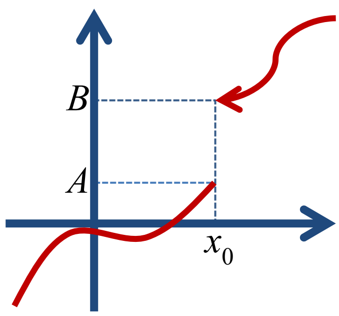


Рис. 3.

В этом случае x_0 называется точкой неустранимого разрыва первого рода функции $f(x)$ (Рис. 3.) Разность $B-A$ называется скачком функции $f(x)$ в точке x_0.

3. Во всех остальных случаях точка разрыва называется точкой разрыва второго рода. Это может быть в следующих случаях:

$$\left[\begin{array}{l}\nexists\ f(x_0-0),\\ \nexists\ f(x_0+0),\\ f(x_0-0)=\infty,\\ f(x_0+0)=\infty.\end{array}\right.$$

5. **Непрерывность на промежутке.**

<u>**Определение 4.**</u> Функция $f(x)$ непрерывна справа в точке x_0, если для некоторого $\delta>0$ она определена в $[x_0,x_0+\delta)$, при этом $f(x_0+0)=f(x_0)$.
Функция $f(x)$ непрерывна слева в точке x_0, если для некоторого $\delta>0$ она определена в $(x_0-\delta,x_0]$ при этом $f(x_0-0)=f(x_0)$.

<u>**Определение 5.**</u> Функция $f(x)$ непрерывна на интервале (a,b), если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

<u>**Определение 6.**</u> Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$, если

- $f(x)$ непрерывна на интервале (a,b),
- $f(x)$ непрерывна справа в точке a,
- $f(x)$ непрерывна слева в точке b.

Множество функций, непрерывных на отрезке $[a,\ b]$, обозначается $C([a,b])$. Можно проверить что это множество является линейным пространством.

Теорема 4. (Непрерывность обратной функции)

Пусть есть функция $y=f(x)$:

$$\left.\begin{array}{c}D(f)=[a,b]\\ E(f)=[c,d]\\ f(x)\text{ строго возрастает (убывает) на }[a,b]\\ f(x)\in C([a,b])\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}\exists x=f^{-1}(y)-\text{обратная функция}\\ D(f^{-1})=[c,d]\\ E(f^{-1})=[a,b]\\ f^{-1}(y)\text{ строго возрастает (убывает) на }[c,d]\\ f^{-1}(y)\in C([c,d])\end{array}\right.$$

Замечание. Графики функций $y=f(x)$ и $x=f^{-1}(y)$ – это одна и та же кривая. Если в обратной функции переставить местами переменные и рассмотреть новую функцию $y=f^{-1}(x)$, то графики функций $y=f(x)$ и $y=f^{-1}(x)$ симметричны относительно прямой, являющейся графиком функции $y=x$. В качестве примера, на рисунке 4 изображены графики синуса (на промежутке его монотонности) и его обратной функции – арксинуса.

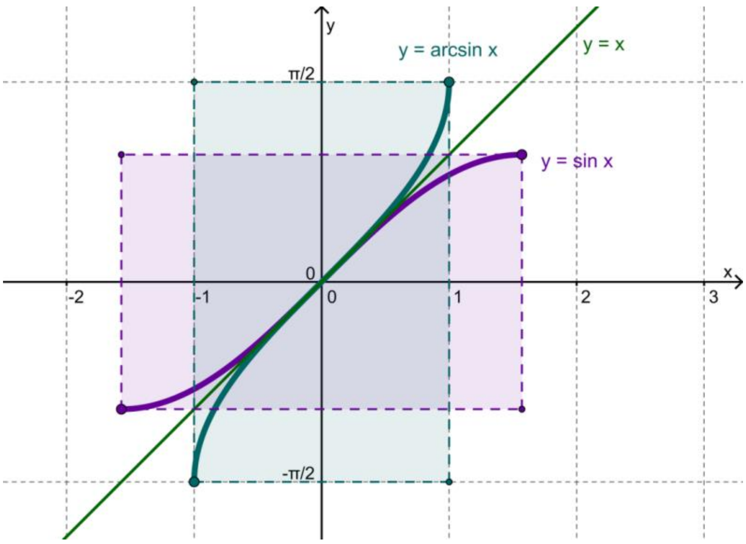


Рис. 4.

6. Непрерывность основных элементарных функций.

Основные элементарные функции – это те функции, которые мы постоянно используем. К ним относятся: постоянная функция, линейная, многочлены, дробно-рациональные функции, степенная и показательная функции, логарифмы, тригонометрические функции и обратные к ним, а также композиции (сложные функции) перечисленных функций. Справедлива следующая теорема.

Теорема 5. (О непрерывности элементарных функций)

Все элементарные функции непрерывны на своей области определения.

Доказательство

Докажем эту теорему для некоторых элементарных функций.

1) $f(x) = C -$ постоянная функция, график которой изображен на рисунке 5.

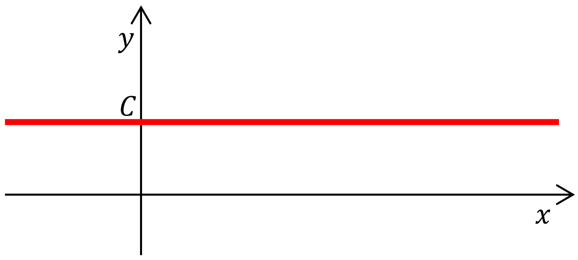


Рис. 5.

Область определения функции $D(f) = (-\infty, +\infty)$. Возьмем $\forall x,\ \Delta x \in \mathbb{R}$ и рассмотрим приращение функции в произвольной точке $x \in (-\infty, +\infty)$: $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0$, то есть $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x) = 0 \ \Rightarrow f(x) \in C((-\infty,\ +\infty))$.

2) $f(x) = x -$ частный случай линейной функции. График функции на рисунке 6.

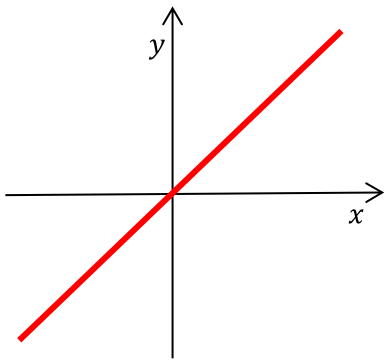


Рис. 6.

Область определения такая же, как и в предыдущем случае.

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = x + \Delta x - x = \Delta x \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x) = 0,$$

то есть функция непрерывна в любой точке $x \in (-\infty, +\infty)$.

3) Из уже доказанных пунктов 1) и 2) и из теоремы об арифметических действиях с непрерывными следует, что любая линейная функция $f(x) = kx + b$ непрерывна на всей вещественной оси.

4) Из теоремы об арифметических действиях с непрерывными функциями следует также, что непрерывна, например, функция $f(x) = x^2$, а методом математической индукции легко показать, что непрерывна функция $f(x) = x^n, \forall n \in \mathbb{N}$ (Рис. 7). Можно также показать, что многочлены любой степени $n \in \mathbb{N}$ также непрерывны на всей вещественной оси, а рациональные функции (отношения двух многочленов) непрерывны во всех точках, в которых знаменатель дробей не обращается в ноль.

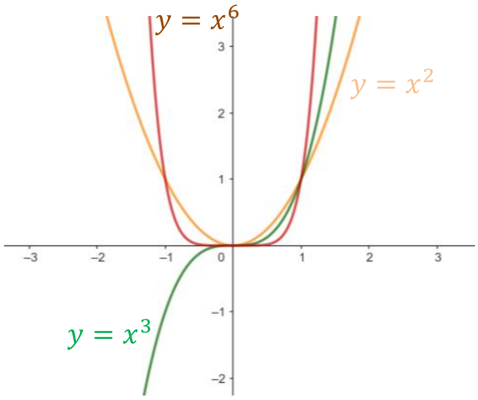


Рис. 7

5) Пользуясь теоремой о непрерывности обратной функции, можно доказать непрерывность функций $f(x) = \sqrt[n]{x}$ на их области определения. Если $n -$ чётное число, то $D(f) = [0, +\infty)$, для нечётных значений n функция определена на всей вещественной оси.

6) $f(x) = \sin x$ определена и непрерывна на всей вещественной оси, так как

$$\Delta f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} \cdot \cos \frac{x + \Delta x + x}{2},$$

$$|\Delta f(x)| = 2 \left| \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \frac{2x + \Delta x}{2} \right| = 2 \left| \sin \frac{\Delta x}{2} \right| \cdot \left| \cos \frac{2x + \Delta x}{2} \right| \leq 2 \left| \frac{\Delta x}{2} \right| \cdot 1 \leq |\Delta x|,$$

$$-|\Delta x| \leq \Delta f(x) \leq |\Delta x| \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) \in C\big((-\infty, +\infty)\big).$$

7) $f(x) = \cos x$ также непрерывна на $(-\infty, +\infty)$, поскольку $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, и мы можем воспользоваться теоремой о непрерывности сложной функции.

8) $f(x) = \operatorname{tg} x$ и $g(x) = \operatorname{ctg} x$ непрерывны как отношение двух непрерывны функций во всех точках, за исключением тех, где знаменатель обращается в ноль, то есть на области определения.

9) Обратные тригонометрические функции также непрерывны на области определения, что следует из теоремы о непрерывности обратной функции.

10) Показательная, логарифмическая и степенная функция с нерациональным показателем степени также непрерывны на области определения. Этот факт оставим без доказательства.

7. Основные теоремы о функциях, непрерывных на отрезке.

Теорема 6. (Первая теорема Больцано – Коши)

$$\left. \begin{array}{l} 1)\ f(x) \in C([a, b]) \\ 2)\ f(a) \cdot f(b) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \exists c \in (a, b): f(c) = 0.$$

Прежде чем доказывать эту теорему, обратимся к ее геометрическому смыслу. В условии теоремы записано, что если функция непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах отрезка принимает значения разных знаков, то найдется такая точка внутри интервала (a, b), в которой функция обратится в ноль. Как показано на рисунке 8, таких точек может быть несколько. Важно то, что найдется хотя бы одна.

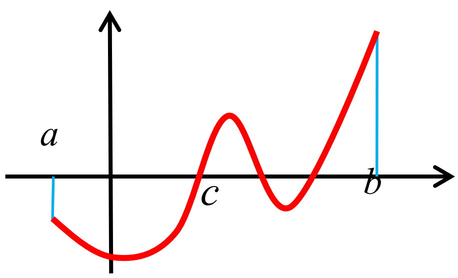


Рис. 8.

Доказательство теоремы 6 конструктивное, в нем содержится алгоритм для поиска нулей непрерывной функции, поэтому оно для нас представляет особый интерес. Для доказательства первой теоремы Больцано – Коши нам потребуется лемма о вложенных промежутках.

Лемма (О вложенных промежутках)

Рассмотрим последовательность вложенных промежутков:

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots \text{(Рис. 9.)}.$$

$$\text{Если } |a_n - b_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \text{ то } \exists!\, c \in [a_n, b_n]\ \forall n \in \mathbb{N}$$

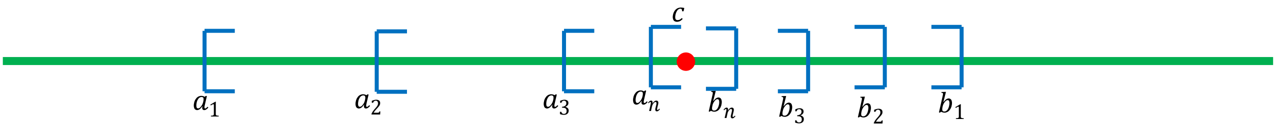


Рис. 9.

/Пояснение. Если длина промежутка стремится к нулю, то существует единственная точка, принадлежащая всем промежуткам сразу./

Доказательство леммы

$a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n \le \cdots \Longrightarrow \{a_n\}$ возрастающая; $a_n \le b_1 \Rightarrow \{a_n\}$ ограничена сверху.

$b_1 \ge b_2 \ge \cdots \ge b_n \ge \cdots \Longrightarrow \{b_n\}$ убывающая; $b_n \ge a_1 \Rightarrow \{b_n\}$ ограничена снизу.

Тогда, по теореме Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности получим:

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c'$, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c'$, а так как $0 = \lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = c'' - c' \Longrightarrow c'' = c' = c$, это означает, что оба пределы равны.

Поскольку $c = \sup\{a_n\}\ \&\ c = \inf\{b_n\} \Rightarrow a_n \le c \le b_n$ при $\forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow c \in [a_n, b_n] \text{ при } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство первой теоремы Больцано – Коши

Пусть для определенности $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Разделим $[a, b]$ пополам.

Возможны 3 случая: $\left[\begin{array}{l} 1)\ f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0; \\ 2)\ f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0; \\ 3)\ f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0. \end{array}\right.$ В первом случае мы уже нашли ноль функции, во втором случае введем новые обозначения: $a_1 = a$, $b_1 = \frac{a+b}{2}$, в третьем случае аналогично введем обозначения $b_1 = b$, $a_1 = \frac{a+b}{2}$ (Рис. 10).

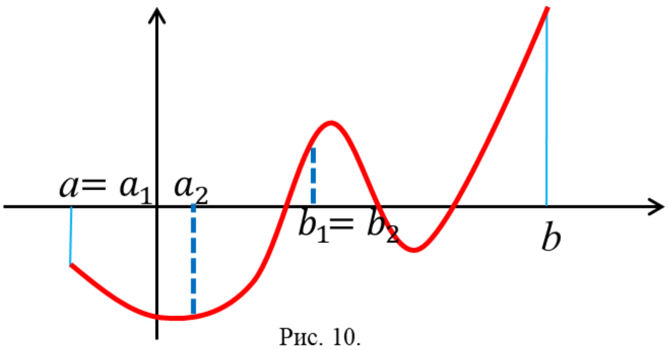


Рис. 10.

Рассмотрим $[a_1, b_1]$. $f(x) \in C[a_1, b_1]$, $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$, мы снова попадаем в условия теоремы. Разделим $[a_1, b_1]$ пополам и снова попадаем в ту же ситуацию с тремя возможными исходами. Поступаем аналогичным образом, чтобы $f(a_2) < 0$, а $f(b_2) > 0$ (см. Рис. 10.) В результате такого алгоритма получим последовательность вложенных промежутков: $[a,\ b] \supset [a_1,\ b_1] \supset [a_2,\ b_2] \supset \cdots \supset [a_n,\ b_n] \supset \cdots$, причем $f(a_n) < 0, f(b_n) > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, а длина отрезка $[a_n,\ b_n]$ равна $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Тогда, по лемме о вложенных промежутках, существует единственная точка c: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$.

Поскольку $f(x)$ непрерывна, перейдем к пределу в неравенствах:

$$f(a_n) < 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(c) \le 0\ \&\ f(b_n) > 0\ \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(c) \ge 0,$$

то есть $f(c) \le 0\ \& f(c) \ge 0 \Rightarrow f(c) = 0$.

Теорема 7. (Вторая теорема Больцано – Коши)

$$\left.\begin{array}{r} f(x) \in C([a,b]), \\ f(a) = A, f(b) = B, \\ A \ne B\ (\text{пусть } A < B). \end{array}\right\} \Rightarrow \forall C \in (A,B)\ \exists c \in (a,b){:}\ f(c) = C.$$

Вторую теорему Больцано – Коши называют также теоремой о промежуточном значении непрерывной функции. Ее геометрический смысл изображен на Рис.11.

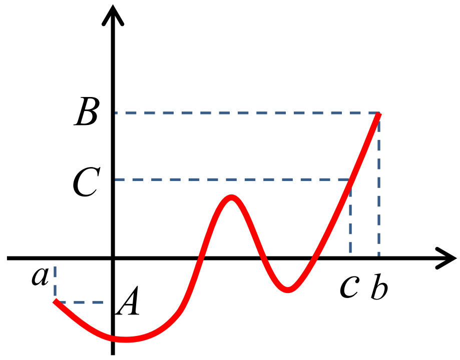


Рис. 11.

Доказательство

Для $\forall C{:} A < C < B$, рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi(x) = f(x) - C$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $\varphi(x) \in C[a,\ b]$ как разность двух непрерывных;

2) $\varphi(a) = f(a) - C = A - C < 0, \varphi(b) = f(b) - C = B - C > 0$,

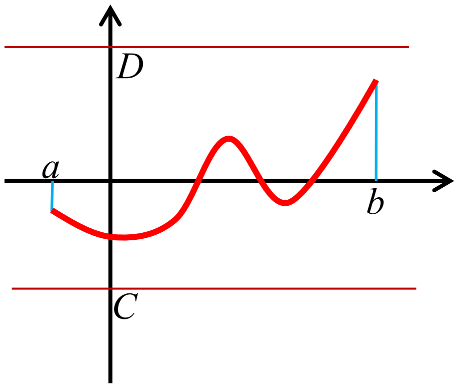
Из 1) и 2) следует, что функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям первой теоремы Больцано – Коши, а тогда $\exists c$: $\varphi(c) = 0$, $0 = \varphi(c) = f(c) - C \Leftrightarrow f(c) = C$.

Следующие две теоремы, имеющие широкое применение в дальнейшем курсе математического анализа, приведем без доказательства.

Теорема 8. (Первая теорема Вейештрасса)

$f(x) \in C([a,b]) \Rightarrow f(x)$ ограничена на $[a,b]$.

/В первой теореме Вейерштрасса устанавливается факт ограниченности



функции, непрерывной на отрезке, то есть $\exists C, D \in \mathbb{R}: C \leq f(x) \leq D$ при $\forall x \in [a, b]$. Рис. 12./

Рис. 12.

Теорема 9. (Вторая теорема Вейерштрасса)

$$f(x) \in C([a,\ b]) \Rightarrow \begin{cases} \exists x_1, x_2 \in [a, b]: \\ f(x_1) = \inf\limits_{x \in [a,\ b]} f(x) = m, \\ f(x_2) = \sup\limits_{x \in [a,\ b]} f(x) = M. \end{cases}$$

/Вторая теорема Вейерштрасса устанавливает факт достижения наибольшего и наименьшего значений функцией, непрерывной на отрезке. Рис. 13./

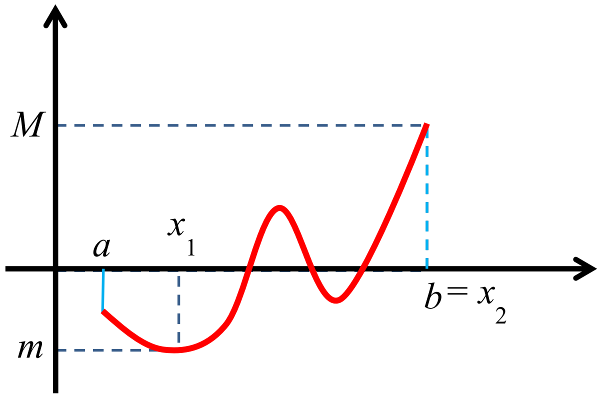


Рис. 13.

<u>Определение 7.</u> В том случае, когда точная верхняя и точная нижняя грани (супремум и инфимум) достигаются, их называют соответственно минимумом и максимумом.

Таким образом, в формулировке теоремы 9 можно записать, что

$$f(x_1) = \min_{x \in [a,\ b]} f(x) = m, f(x_2) = \max_{x \in [a,\ b]} f(x) = M.$$

Следствие

$$\left.\begin{array}{r} D(f) = [a, b], \\ f(x) \in C([a, b]). \end{array}\right\} \Rightarrow E(f) = [m, M].$$

Разработал доцент кафедры высшей математики М. В. Лагунова