Раздел № 04 Начала математического анализа

Тема № 05 Замечательные пределы. Сравнение бесконечно малых.

Лекция № 18

Учебные вопросы:

1. Введение.
2. Первый замечательный предел.
3. Второй замечательный предел.
4. Сравнение бесконечно малых.

Литература

1. Сборник задач по математике в четырех частях. Под общей редакцией А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича
2. Б.П. Демидович. Краткий курс высшей математики.
3. Л.Д. Кудрявцев. Курс математического анализа.
4. Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин. Сборник задач по математическому анализу. Т. 1-3.

1. **Введение**

На этой лекции мы познакомимся с важнейшими пределами, которые носят название «замечательные пределы», и со следствиями из них. С помощью этих пределов будут в дальнейшем получены табличные производные.

2. Первый замечательный предел.

Теорема 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Доказательство

Рассмотрим окружность с центром в начале координат и радиусом R. Зафиксируем угол $0<x<\frac{\pi}{2}$ и отметим точки A, B, C так, как показано на рисунке 1.

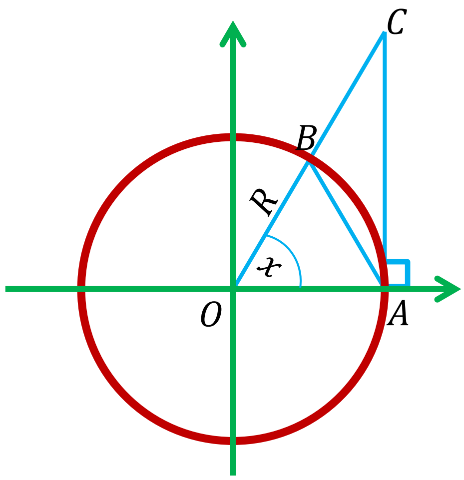

Рис. 1.

$$\Delta OAB\subset \text{сект. } OAB\subset \Delta OAC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}R^2\sin x\le \frac{1}{2}R^2x\le \frac{1}{2}R^2\operatorname{tg}x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin x\le x\le \operatorname{tg}x \text{ при } x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

Поскольку при $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ $\sin x>0$, разделим на $\sin x$:

$$1\le\frac{x}{\sin x}\le\frac{1}{\cos x}.$$

В последнем двойном неравенстве все функции являются четными, поэтому это неравенство выполняется для $\forall x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ 0\right)\cup\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$. Перейдем к обратным величинам:

$$1\ge\frac{\sin x}{x}\ge\cos x.$$

Пусть теперь $x\to 0$, тогда, используя непрерывность косинуса, получим: $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=\cos 0=1$, а тогда по принципу сжатой переменной существует

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\ .$$

Следствия из первого замечательного предела

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=1$
2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$
3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=1$
4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$

Доказательство

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x\cdot x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$
2) Замена: $t=\arcsin x\Rightarrow x=\sin t$. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\sin t}{t}}=1$
3) Аналогично 2)
4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=2\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2=\frac{2}{4}\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$

Во всех приведенных доказательствах кроме замечательных пределов используется непрерывность элементарных функций.

3. **Второй замечательный предел.**

Теорема 2.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

Эту теорему оставим без доказательства. Важно понимать, что переменная может стремиться к бесконечности любого знака. Второй замечательный предел – это классический пример неопределенности $[1^{\infty}]$. Само число e мы определили в одной из предыдущих лекций: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e$.

Следствия из второго замечательного предела

1) $\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$
2) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x} = e^{a}$
3) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
4) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x} = 1$
5) $\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$
6) $\lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x} = \ln a$
7) $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\mu}-1}{x} = \mu$

Доказательство

1) Достаточно сделать замену $\alpha = \frac{1}{x} \Rightarrow \begin{cases}\frac{1}{\alpha} = x,\\ x\to\infty.\end{cases}$
2) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{a}}\right)^{\frac{x}{a}\cdot a} = e^{a}$
3) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x) = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1.$
4) $\log_a(1+x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln a}.$
5) Частный случай 6).
6) Сделаем замену: $u = a^{x}-1 \Rightarrow x = \log_a(1+u), u\to 0 \Leftrightarrow x\to 0.$
$$\frac{a^{x}-1}{x} = \frac{u}{\log_a(1+u)}\xrightarrow[x\to 0]{}\frac{1}{1/\ln a} = \ln a.$$
7) Замена: $u = (1+x)^{\mu}-1, u\to 0 \Leftrightarrow x\to 0,$
$$u+1 = (1+x)^{\mu} \Rightarrow \ln(1+u) = \mu\ln(1+x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{(1+x)^{\mu}-1}{x} = \frac{u}{\ln(1+u)}\cdot\frac{\mu\,\ln(1+x)}{x}\xrightarrow[x\to 0]{}\mu.$$

4. **Сравнение бесконечно малых.**

Определение 1. Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x\to x_0$, если
$$\lim_{x\to x_0}\alpha(x) = 0.$$

Замечание. Используя теорему об арифметических действиях с пределами, можно легко показать, что если есть $\alpha(x),\ \beta(x) -$ две бесконечно малые при $x\to x_0$, то $\left\{\begin{matrix} \alpha(x) \pm \beta(x) \\ \alpha(x)\beta(x) \end{matrix}\right\} -$ бесконечно малые при $x \to x_0$. Вопрос возникает в том случае, когда рассматривается $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, поскольку это случай неопределенности $\left[\frac{0}{0}\right]$.

<u>Определение 2.</u> Если $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то $\alpha(x)$ $-$ бесконечно малая более высокого порядка, чем $\beta(x)$. При этом пишут: $\alpha(x) = o\big(\beta(x)\big)$, используя символ о-малое.

<u>Определение 3.</u> Если $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, то $\beta(x)$ $-$ бесконечно малая более высокого порядка, чем $\alpha(x)$. При этом пишут: $\beta(x) = o\big(\alpha(x)\big)$.

<u>Определение 4.</u> Если $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq 0$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ одного порядка малости. Если же при этом $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными бесконечно малыми при $x \to x_0$. И пишут: $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to x_0$.

Замечания

- Если предел отношения не существует, то такие бесконечно малые считают несравнимыми.
- $\alpha(x) \equiv 0$ $-$ бесконечно малая бесконечно большого порядка. То есть если в числителе дроби стоит тождественный ноль, а в знаменателе любая другая бесконечно малая величина, то предел отношения равен нулю.

Теорема 3. (О замене на эквивалентные бесконечно малые)

Пусть есть две пары эквивалентных бесконечно малых функций при $x \to x_0$:

$$\left.\begin{matrix} \alpha(x) \sim \alpha_1(x) \text{при } x \to x_0 \\ \beta(x) \sim \beta_1(x) \text{ при } x \to x_0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1\ (x)}.$$

Доказательство

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\alpha_1\ (x)} \cdot \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \cdot \frac{\beta_1(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$$

Замечание. В теореме 3 буквально говорится о том, что при вычислении пределов в **<u>произведении или в частном</u>** можно заменить одну бесконечно малую величину на эквивалентную ей.

Таблица эквивалентных бесконечно малых

Пусть $u(x) \to 0$ при $x \to x_0$.

1. $\sin u \sim u$
2. $\operatorname{tg} u \sim u$
3. $\arcsin u \sim u$
4. $\operatorname{arctg} u \sim u$
5. $1 - \cos u \sim \frac{u^2}{2}$
6. $e^u - 1 \sim u$
7. $a^u - 1 \sim u \ln a$
8. $\ln(1 + u) \sim u$
9. $\log_a(1 + u) \sim \frac{u}{\ln a}$
10. $(1 + u)^\mu - 1 \sim \mu u$

Разработал доцент кафедры высшей математики М. В. Лагунова