

Раздел № 05 Д и ф ф е р е н ц и а л ь н о е

и с ч и с л е н и е

Тема № 01 Производная и дифференциал. Правила

вычисления

Лекция № 19

Учебные вопросы:

1. Введение.
2. Понятие производной.
3. Дифференцируемость функций.
4. Геометрический смысл производной и дифференциала.
5. Правила вычисления производной и дифференциала.
6. Таблица производных.

Литература

1. Сборник задач по математике в четырех частях. Под общей редакцией А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича
2. Б.П. Демидович. Краткий курс высшей математики.
3. Л.Д. Кудрявцев. Курс математического анализа.
4. Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин. Сборник задач по математическому анализу. Т. 1-3.

1. Введение

В этом разделе углубляются школьные знания о производной, выводятся формулы дифференцирования, изучаются свойства дифференцируемых функций одной переменной. Рассматриваются приложения производной к исследованию функций, к построению графиков функций и к решению разного рода прикладных задач. Понятия и теоремы этого раздела образуют фундамент, на который опираются последующие разделы математического анализа.

2. Понятие производной.

Для начала вспомним понятия приращения функции и ее непрерывности. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в $U(x_0)$. Возьмем $\forall \Delta x \in \mathbb{R}: x + \Delta x \in U(x_0)$. рассмотрим приращение функции в точке x_0 , вызванное приращением аргумента Δx : $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ (Рис. 1)

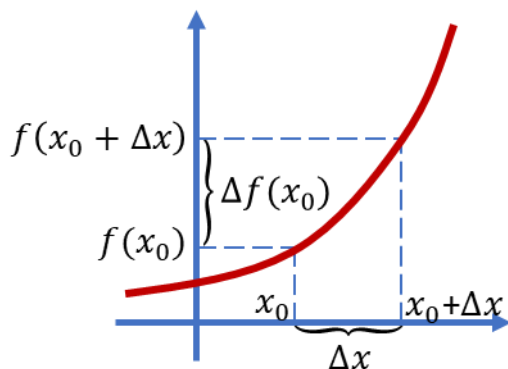


Рис. 1.

Поскольку функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x_0) = 0$ и, если рассмотреть $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$, то получаем неопределенность $\left[\frac{0}{0} \right]$.

Определение 1. Если существует конечный $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$, то он называется производной функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$, $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}$.

Замечания. Можно также говорить об односторонних производных и даже о бесконечной производной.

- Если существует конечный $\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$, то он называется производной справа функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается $f'(x_0 + 0)$.
- Если существует конечный $\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$, то он называется производной слева функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается $f'(x_0 - 0)$.
- Если $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \infty$, а сама функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 , то говорят, что в этой точке функция имеет бесконечную производную и пишут $f'(x_0) = \infty$.

Производные основных элементарных функций мы вычислим далее, а пока, в качестве примера, найдем производную функции $f(x) = x$.

$$x' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

3. Дифференцируемость функции.

Пусть, как и в предыдущем пункте, $f(x)$ определена и непрерывна в $U(x_0)$, возьмем так же $\forall \Delta x \in \mathbb{R}: x + \Delta x \in U(x_0)$ и рассмотрим приращение функции $\Delta f(x_0)$.

Определение 2. Функция $f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0 , если ее приращение в этой точке может быть представлено в виде:

$$\Delta f(x_0) = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \quad (1)$$

где $A = \text{Const}$, $\alpha(\Delta x) \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0$. При этом слагаемое $A\Delta x$ называется главной линейной частью приращения, или дифференциалом функции $f(x)$ в точке x_0 и используется обозначение $A\Delta x = df(x_0)$.

Теорема 1. (Связь между дифференцируемостью и непрерывностью)

$f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \Rightarrow f(x)$ непрерывна в точке x_0 .

Доказательство

Если функция дифференцируема в точке x_0 , то выполняется условие (1), а тогда при переходе к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$ получим, что $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x_0) = 0$, то есть функция непрерывна в точке x_0 .

Замечание. Обратная теорема неверна, то есть из непрерывности не следует дифференцируемость. В качестве примера можно привести функцию $f(x) = |x|$.

Теорема 2. (Необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции)

$f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \Leftrightarrow \exists f'(x_0) = A$.

Доказательство

Необходимость

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 , тогда выполняется условие (1), разделим левую и правую части (1) на $\Delta x \neq 0$ и перейдем к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (A + \alpha(\Delta x)) = A + 0 \Rightarrow \exists f'(x_0) = A.$$

Достаточность

Пусть теперь известно, что $\exists f'(x_0) = A$, это значит, что

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = A \Rightarrow \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x), \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0, \quad \text{откуда заключаем, что}$$

$$\Delta f(x_0) = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x.$$

Замечание. Благодаря теореме 2, мы получили формулу для вычисления дифференциала: $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$, если же $f(x) = x$, то $dx = x'\Delta x = 1 \cdot \Delta x$, то есть $dx = \Delta x$, а для дифференциала справедлива формула:

$$df(x) = f'(x)dx. \quad (2)$$

Формула (2) часто используется в приближенных вычислениях и при решении некоторых задач курса физики, поскольку $\Delta f(x_0) \approx df(x_0)$.

4. Геометрический смысл производной и дифференциала.

Прежде чем говорить о геометрическом смысле производной и дифференциала, дадим определение касательной к кривой.

Пусть есть кривая $\mathcal{L}$ на плоскости; точки $M, N \in \mathcal{L}$ (Рис. 2). Прямая (MN) называется секущей.

Определение 3. Прямая p называется касательной к кривой $\mathcal{L}$ в точке M , если при перемещении точки N вдоль кривой $\mathcal{L}$ к точке M секущая (MN) стремится занять положение прямой p . Это означает, что угол α между секущей и касательной должен стремиться к нулю.

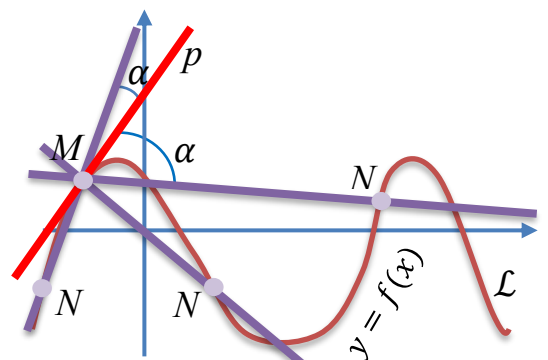


Рис. 2.

Другими словами, касательная – это предельное положение секущей.
Геометрический смысл производной изображен на рисунке 3.

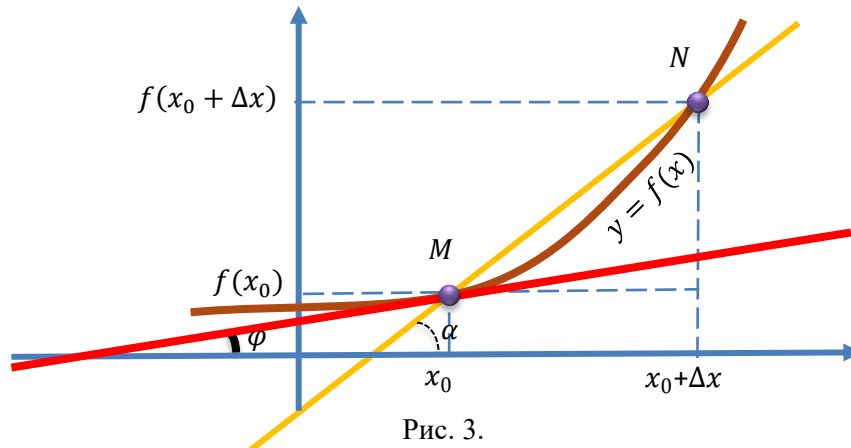


Рис. 3.

$$M(x_0, f(x_0)), N(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x)) \in \Gamma f, (MN) - \text{секущая}, \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha.$$

$$\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta f(x_0) \rightarrow 0 \Rightarrow N \rightarrow M \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \operatorname{tg} \varphi,$$

то есть производная в точке x_0 равна тангенсу угла наклона касательной. Таким образом, чтобы существовала касательная к графику функции $f(x)$ в точке $M(x_0, f(x_0))$, необходимо и достаточно, чтобы функция была дифференцируема в этой точке или, что то же самое, чтобы существовала производная $f'(x_0)$.

Определение 4. Функции, дифференцируемые на промежутке $\langle a, b \rangle$ называют гладкими, если их производные также непрерывны. Множество таких функций обозначается $C^1(\langle a, b \rangle)$.

Поскольку мы знаем, как найти тангенс угла наклона касательной к графику функции, то можно записать уравнения касательной и нормали к графику функции:

- $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ – уравнение касательной;
- $y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$ – уравнение нормали.

Геометрический смысл дифференциала изображен на рисунке 4.

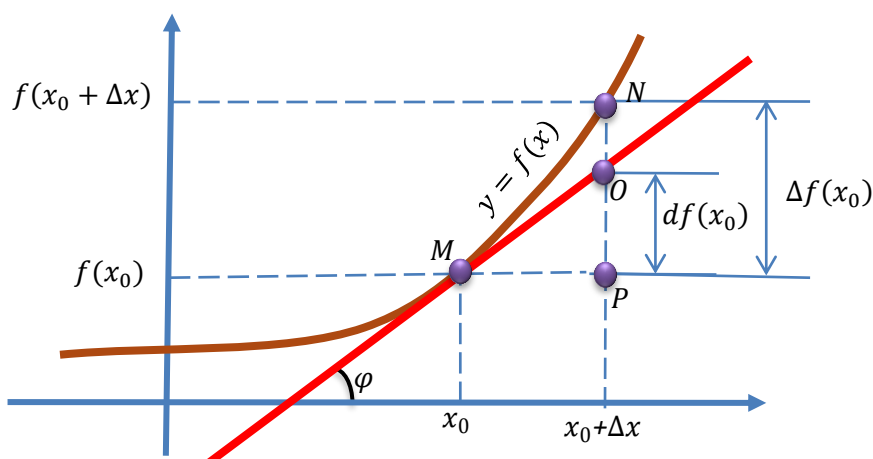


Рис. 4.

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x = \operatorname{tg} \varphi \cdot \Delta x, |MP| = \Delta x = dx, |PO| = \operatorname{tg} \varphi \cdot \Delta x = df(x_0),$$

$$\Delta f(x_0) = |PN|.$$

В нашем случае (Рис. 4) и приращение, и дифференциал положительны, то есть равны длинам соответствующих отрезков. В общем случае дифференциал функции в точке x_0 равен приращению ординаты касательной к графику функции в точке M при

изменении аргумента на величину $\Delta x = dx$.

5. Правила вычисления производных и дифференциала.

Теорема 3. (Об арифметических действиях с дифференцируемыми функциями)

$$\left. \begin{array}{l} u(x) \text{ дифференцируема в } x_0, \\ v(x) \text{ дифференцируема в } x_0. \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u(x) + v(x), \\ u(x) \cdot v(x), \\ \frac{u(x)}{v(x)} \end{array} \right. \text{ дифференцируемы в } x_0,$$

причем справедливы формулы:

$$1. (u + v)' = u' + v', d(u + v) = du + dv;$$

$$2. (uv)' = u'v + uv', d(uv) = u dv + v du;$$

$$3. \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}.$$

Доказательство

1. Пусть $f(x) = u(x) + v(x)$.

$$\begin{aligned} \Delta f(x_0) &= u(x_0 + \Delta x) + v(x_0 + \Delta x) - (u(x_0) + v(x_0)) = \\ &= (u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)) + (v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)) = \Delta u(x_0) + \Delta v(x_0), \\ \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} &= \frac{\Delta u(x_0)}{\Delta x} + \frac{\Delta v(x_0)}{\Delta x} \Rightarrow \\ \Rightarrow \exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u(x_0)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v(x_0)}{\Delta x} = u'(x_0) + v'(x_0). \\ d(u + v) &= (u + v)' dx = u' dx + v' dx = du + dv. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \Delta u &= u(x_0 + \Delta x) - u(x_0) \Rightarrow u(x_0 + \Delta x) = u + \Delta u, v(x_0 + \Delta x) = v + \Delta v, \\ \Delta(uv) &= (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = uv + u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \cdot \Delta v - uv = \\ &= u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \cdot \Delta v. \end{aligned}$$

Разделим на $\Delta x \neq 0$:

$$\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = u \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v,$$

поскольку функция v дифференцируема в точке x_0 , она непрерывна в этой точке, а тогда $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v = 0$. Перейдем в последнем равенстве к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta(uv)}{\Delta x} &= u \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + 0 \Rightarrow \exists (uv)' = u'v + uv'. \\ d(uv) &= (uv)' dx = u dv + v du. \end{aligned}$$

$$3. \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{uv + v\Delta u - uv - u\Delta v}{v(v + \Delta v)} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}, \text{ разделим на } \Delta x \neq 0:$$

$$\frac{\Delta\left(\frac{u}{v}\right)}{\Delta x} = \frac{v \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v\Delta v}, \text{ если } \Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta u}{\Delta x} \rightarrow u', \\ \frac{\Delta v}{\Delta x} \rightarrow v', \\ \Delta v \rightarrow 0. \end{array} \right. \Rightarrow \exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\left(\frac{u}{v}\right)}{\Delta x} = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \left(\frac{u}{v}\right)' dx = \frac{u'v - uv'}{v^2} dx = \frac{vu' dx - uv' dx}{v^2} = \frac{v du - u dv}{v^2}.$$

Теорема 4. (Производная сложной функции)

$$\left. \begin{array}{l} u = u(x) \text{ дифференцируема в } x_0, \\ y = f(u) \text{ дифференцируема в } u_0 = u(x_0), \\ \text{определена функция } F(x) = f(u(x)). \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} F(x) \text{ дифференцируема в } x_0, \\ F'(x_0) = f'_u(u_0)u'_x(x_0). \end{cases}$$

Доказательство

Возьмем $\Delta x \neq 0$: $(x_0 + \Delta x) \in D(u)$, $\Delta u = u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)$,

$$\Delta F(x_0) = F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) = f(u(x_0 + \Delta x)) - f(u(x_0)) = \Delta f(u_0).$$

Так как $f(u)$ дифференцируема в u_0 , $\Delta f(u_0) = A\Delta u + \alpha(\Delta u)\Delta u$, где $A = f'_u(u_0)$, $\alpha(\Delta u) \xrightarrow{\Delta u \rightarrow 0} 0$. Разделим на Δx :

$$\frac{\Delta f(u_0)}{\Delta x} = f'_u(u_0) \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha(\Delta u) \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Поскольку функция $u = u(x)$ дифференцируема в x_0 , следовательно она непрерывна в точке x_0 , а это значит, что $\Delta u \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0 \Rightarrow \alpha(\Delta u) \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0$.

Перейдем к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(u_0)}{\Delta x} = f'_u(u_0)u'_x(x_0).$$

Следствие. (Инвариантность формы первого дифференциала)

$$d(f(u(x))) = f'(u)u'(x)dx = f'(u)du = F'(x)dx$$

Теорема 5. (Производная обратной функции)

$$\left. \begin{array}{l} y = f(x) \text{ непрерывна} \\ \text{и строго монотонна в } U(x_0), \\ \exists \frac{df}{dx}\bigg|_{x=x_0} \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \text{обратная функция } x = f^{-1}(y) \\ \text{имеет производную в точке } y_0 = f(x_0), \\ \frac{df^{-1}}{dy}\bigg|_{y=f(x_0)} = \frac{1}{\frac{df}{dx}\bigg|_{x=x_0}}. \end{cases}$$

Доказательство

Из предыдущего материала известно, что существует непрерывная обратная функция $x = f^{-1}(y)$, которая строго монотонна в некоторой окрестности $V(y_0)$. Возьмем $\forall \Delta x \neq 0$: $x = x_0 + \Delta x \in U(x_0) \Rightarrow$ приращение Δx вызовет приращение функции $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, при этом выполняются следующие условия:

- $\Delta x \rightarrow 0 \Leftrightarrow \Delta y \rightarrow 0$ в силу непрерывности обратной функции,
- $\Delta x \neq 0 \Leftrightarrow \Delta y \neq 0$ в силу строгой монотонности обеих функций.

$$\text{Поскольку } \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}, \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}, \text{ то есть } \frac{df^{-1}}{dy}\bigg|_{y=f(x_0)} = \frac{1}{\frac{df}{dx}\bigg|_{x=x_0}}.$$

6. Таблица производных

Учитывая все вышесказанное, запишем таблицу производных.

1. $(C)' = 0$
2. $(x^a)' = ax^{a-1}, \forall a \in \mathbb{R}$
3. $(a^x)' = a^x \ln a, \forall a \in \mathbb{R}, a > 0$
4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \forall a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$
5. $(\sin x)' = \cos x$
6. $(\cos x)' = -\sin x$

$$7. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$8. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$9. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$10. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$11. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$12. (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Выведем, например, формулы 2, 3, 5, 7 и 11. Остальные табличные производные получите самостоятельно.

Вывод формулы 2. $f(x) = x^a$, зафиксируем произвольное число $x \neq 0$ из $D(f)$.

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^a - x^a}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^a \left(\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^a - 1 \right)}{\Delta x} = \\ &= x^a \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^a - 1}{\Delta x} = x^a \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a \frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = ax^{a-1}. \end{aligned}$$

Воспользовались заменой на эквивалентную бесконечно малую. При $x = 0$ формула проверяется непосредственно.

Вывод формулы 3. $f(x) = e^x$.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x.$$

Вывод формулы 4. $f(x) = \sin x$.

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \frac{2x + \Delta x}{2}}{\Delta x} = \\ &= 2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \cos x. \end{aligned}$$

Вывод формулы 7. $f(x) = \operatorname{tg} x$. Достаточно применить формулу для производной частного.

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Вывод формулы 11. $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Применим два способа вывода формулы 11.

В первом случае воспользуемся тем, что таблица эквивалентных бесконечно малых может применяться по-разному. Если нам это удобно, то можно поменять бесконечно малую величину на подходящую функцию от нее. Например, в нашем случае, можно заменить бесконечно малую величину $\operatorname{arctg}(x + \Delta x) - \operatorname{arctg} x$ на тангенс от нее.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(x + \Delta x) - \operatorname{arctg} x}{\Delta x} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x + \Delta x)) - \operatorname{arctg} x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x + \Delta x)) - \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)}{1 + \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x + \Delta x)) \cdot \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)}}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{x + \Delta x - x}{1 + (x + \Delta x)x}}{\Delta x} = \frac{1}{1 + x^2}.
\end{aligned}$$

Второй способ основывается на правиле вычисления производной обратной функции.

Рассмотрим функцию $y = \operatorname{arctg} x \Rightarrow x = \operatorname{tg} y$ – обратная функция, при этом

$$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}, -\infty < x < +\infty.$$

$$\frac{dy}{dx} = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y + \sin^2 y} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Замечание. Используя теорему о производной сложной функции, таблицу производных можно записать, учитывая, что вместо независимой переменной x может быть дифференцируемая функция $u(x)$, например, $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$.

Разработал доцент кафедры высшей математики М. В. Лагунова