

Раздел № 1 Линейная алгебра

Тема № 2 Миноры и алгебраические дополнения.

Определители порядка n .

Лекция № 2

Учебные вопросы:

1. Введение.
2. Миноры и алгебраические дополнения.
3. Разложение определителя по строке (столбцу).
4. Понятие определителя n -го порядка.
5. Основные способы вычисления определителей.

Литература

1. Сборник задач по математике в четырех частях. Под общей редакцией А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича
2. Б.П. Демидович. Краткий курс высшей математики.
3. А.Е. Умнов. Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

1. Введение

На предыдущей лекции мы ознакомились с определителями второго и третьего порядков. Были перечислены некоторые свойства определителей. Перейдем к понятию определителей более высокого порядка. Для этого нам понадобятся понятия минора и алгебраического дополнения элемента матрицы определителя.

2. Миноры и алгебраические дополнения.

Определение 1. Минором M_{ik} (дополнительным минором) элемента a_{ik} квадратной матрицы 3-го порядка A называется определитель матрицы 2-го порядка, полученной из матрицы A путем вычёркивания её i -той строки и k -го столбца, на пересечении которых находится a_{ik} .

Например, если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, то $M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Определение 2. Алгебраическим дополнением элемента a_{ik} матрицы A называется число $A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, A_{21} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

3. Теорема о разложении определителя третьего порядка по элементам строки или столбца.

Теорема. Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) на соответствующие алгебраические дополнения элементов этой строки (столбца) равна определителю.

Например, разложение определителя по первой строке будет выглядеть так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \sum_{j=1}^3 a_{1j}A_{1j}$$

Можно разложить определитель аналогично по любой другой строке или по любому столбцу. Запишем, например, разложение определителя по второму столбцу:

$$\det A = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} = \sum_{i=1}^3 a_{i2}A_{i2}$$

Очевидно, что мы получим 6 таких утверждений, каждое из которых легко проверить, исходя из определения алгебраических дополнений и правила Саррюса.

Следствие. Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) на алгебраические дополнения элементов параллельного ряда равна нулю.

Например, $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} = 0$. Всего получим 12 аналогичных равенств, которые также можно проверить непосредственно. Но проще использовать тот факт, что в данном случае мы раскладываем определитель с одинаковыми строками или столбцами.

4. Понятие определителя n -го порядка.

Введем в рассмотрение определители более высокого порядка. Определители четвертого порядка определим как сумму произведений элементов первой строки на соответствующие алгебраические дополнения, то есть получится сумма из четырех произведений чисел на определители третьего порядка. Далее можно ввести определители пятого порядка и так далее. В общем случае получим определители любого порядка $n \in \mathbb{N}$.

Определение 3. Квадратной матрицей n -го порядка называется таблица чисел:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \text{ где } a_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Определение 4. Определителем n -го порядка, соответствующем матрице A , называется число, равное

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{1j}A_{1j}.$$

То есть мы дали определение, используя разложение по первой строке. Можно доказать, что то же самое число получится, если раскладывать определитель по любой другой строке или по любому столбцу. Можно также доказать, что все перечисленные ранее свойства определителей будут сохраняться.

5. Основные способы вычисления определителей.

Способы вычисления определителей будут разобраны на практических занятиях, мы только перечислим их.

- Вычисление определителя посредством понижения порядка.
- Приведение определителя к верхней или нижней треугольной форме.
- Составление рекуррентных соотношений.
- Вычисление определителя с помощью метода математической индукции.

Разработал доцент кафедры высшей математики М. В. Лагунова