

Раздел № 05 Д и ф ф е р е н ц и а л ь н о е

и с ч и с л е н и е

Тема № 02 Основные теоремы дифференциального

исчисления. Правило Лопиталя.

Лекция № 20

Учебные вопросы:

1. Введение.
2. Теорема Ферма.
3. Теорема Ролля.
4. Теорема Лагранжа.
5. Правило Лопиталя.

Литература

1. Сборник задач по математике в четырех частях. Под общей редакцией А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича
2. Б.П. Демидович. Краткий курс высшей математики.
3. Л.Д. Кудрявцев. Курс математического анализа.
4. Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин. Сборник задач по математическому анализу. Т. 1-3.

1. Введение

Переходим к изучению основных теорем дифференциального исчисления. Часто их называют «французскими теоремами», поскольку они были доказаны в XVII веке французскими математиками. В дальнейшем курсе математического анализа эти теоремы имеют широкое применение.

2. Теорема Ферма.

Теорема 1.

$$\left. \begin{array}{l} 1) f(x) \in C((a, b)), \\ 2) \text{ в точке } x_0 \in (a, b) f(x) \text{ принимает} \\ \text{наибольшее (наименьшее) значение,} \\ 3) \exists f'(x_0). \end{array} \right\} \Rightarrow f'(x_0) = 0.$$

Геометрический смысл теоремы Ферма

Геометрический смысл теоремы Ферма заключается в том, что если в точке x_0 непрерывная функция принимает наибольшее или наименьшее значение на интервале, а в точке $M(x_0, f(x_0))$ графика функции $f(x)$ существует касательная, то она параллельна оси абсцисс (Рис. 1).

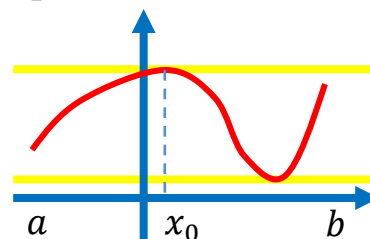


Рис. 1.

Доказательство теоремы Ферма

Пусть $f(x_0)$ – наибольшее значение $f(x)$ на (a, b) , то есть $f(x_0) \geq f(x)$ при $\forall x \in (a, b)$.

$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \leq 0$ при $\forall \Delta x: x_0 + \Delta x \in (a, b)$.

$$f'(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists f'(x_0 + 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, & (1) \\ \exists f'(x_0 - 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, & (2) \end{cases}$$

при этом $f'(x_0 + 0) = f'(x_0 - 0) = f'(x_0)$. Рассмотрим два случая:

$$(1) \Delta x > 0 \Rightarrow \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0,$$

$$(2) \Delta x < 0 \Rightarrow \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0.$$

При переходе к пределу при $\Delta x \rightarrow \pm 0$ неравенства сохраняются, то есть

$$\begin{cases} f'(x_0) \leq 0 \\ f'(x_0) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x_0) = 0.$$

3. Теорема Ролля.

Теорема 2.

$$\left. \begin{array}{l} 1) f(x) \in C([a, b]), \\ 2) \exists f'(x) \quad \forall x \in (a, b), \\ 3) f(a) = f(b). \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \xi \in (a, b): f'(\xi) = 0.$$

Геометрический смысл теоремы Ролля

Геометрический это означает, что если непрерывная на отрезке функция имеет производную в каждой точке соответствующего интервала, а на границах промежутка принимает одинаковые значения, то найдется хотя бы одна точка $\xi \in (a, b)$, такая что касательная к графику функции $f(x)$ в точке $M(\xi, f(\xi))$ параллельна оси абсцисс (Рис. 2).

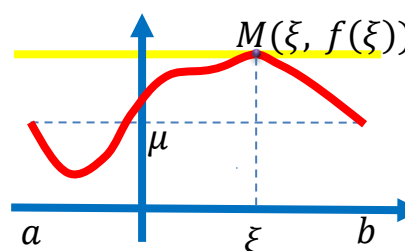


Рис. 2.

Доказательство теоремы Ролля

Пусть $f(a) = f(b) = \mu$ (Рис. 2.) Возможны два случая:

- $f(x) \equiv \mu \Rightarrow \xi$ – любая точка интервала (a, b) .
- Внутри интервала (a, b) есть точки, для которых $f(x) < \mu$ или $f(x) > \mu$.

Пусть, например, $f(x) > \mu$ в некоторых точках. $f(x) \in C([a, b])$, то есть непрерывна на отрезке $[a, b]$, и по второй теореме Вейештрасса $f(x)$ достигает своего наибольшего значения в точке $\xi \in [a, b]$.

$$\exists \xi: f(\xi) = \sup_{x \in [a, b]} f(x), \text{ причем } \begin{cases} \xi \neq a, \\ \xi \neq b, \end{cases} \text{ так как } f(a) = f(b) = \mu < \sup_{x \in [a, b]} f(x).$$

По условию теоремы существует производная в любой точке интервала (a, b) и, в частности, в точке ξ , а тогда, по теореме Ферма, $f'(\xi) = 0$.

4. Теорема Лагранжа.

Теорема 3.

$$\left. \begin{array}{l} 1) f(x) \in C([a, b]), \\ 2) \exists f'(x) \quad \forall x \in (a, b). \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \xi \in (a, b): f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Геометрический смысл теоремы Лагранжа

Если функция непрерывна на отрезке и имеет производную в любой внутренней точке интервала, то найдется точка $\xi \in (a, b)$, такая что касательная в точке $M(\xi, f(\xi))$ к графику функции параллельна секущей, соединяющей точки $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$ этого графика. См. рисунок 4.

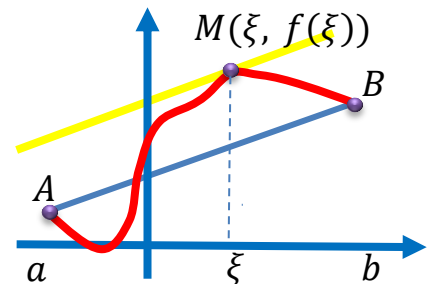


Рис. 4.

Доказательство теоремы Лагранжа

На отрезке $[a, b]$ рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a).$$

Проверим, что функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля.

- 1) $\varphi(x) \in C([a, b])$ как линейная комбинация непрерывных функций.
- 2) $\forall x \in (a, b) \exists \varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.
- 3) $\varphi(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (a - a) = 0$,

$$\varphi(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (b - a) = 0.$$

Тогда по теореме Ролля существует точка $\xi \in (a, b)$: $\varphi'(\xi) = 0$, то есть, с учетом 2),

$$0 = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Замечания

- Полученная формула носит название формулы Лагранжа:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- Пусть функция $y = f(x)$ удовлетворяет на $[a, b]$ условиям теоремы Лагранжа. Тогда для любого $x \in [a, b]$ и $\Delta x: x + \Delta x \in [a, b]$ справедлива формула конечных приращений:

$$\Delta f(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta \Delta x) \Delta x, \text{ где } \theta \in (0; 1).$$

5. Теорема Коши.

Теорема 4.

$$\left. \begin{array}{l} 1) f(x), g(x) \in C([a, b]), \\ 2) \exists f'(x), g'(x) \forall x \in (a, b), \\ 3) g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b). \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \exists \xi \in (a, b): \\ \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \end{array}$$

Последняя формула называется формулой Коши. Проверим корректность этой формулы. Нужно показать, что в знаменателях дробей нет нулей.

➤ $g'(\xi) \neq 0$ по условию 3) теоремы.

➤ Если $g(b) = g(a)$, то по теореме Ролля найдется точка $\mu \in (a, b)$, в которой $g'(\mu) = 0$, а это также противоречит условию 3).

Доказательство теоремы Коши

Доказательство теоремы 4 проводится аналогично доказательству теоремы Лагранжа, достаточно рассмотреть вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} (g(x) - g(a)).$$

6. Правило Лопиталья.

Теорема 5.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Пусть } f(x), g(x) \text{ определены на } (a, b): \\ 1) f(a+0) = g(a+0) = 0, \\ 2) \exists \text{ конечные } f'(x) \text{ и } g'(x) \forall x \in (a, b), \\ 3) g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b), \\ 4) \exists \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k. \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = k.$$

Доказательство

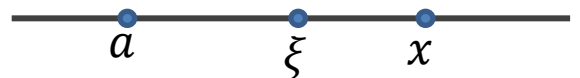
Доопределим функции в точке a по непрерывности:

$$f(a) = f(a+0) = 0; g(a) = g(a+0) = 0.$$

Доопределенные таким образом функции будут непрерывны на $[a, b)$.

Возьмем $\forall x \in (a, b) \Rightarrow$ на отрезке $[a, x]$ функции $f(x), g(x)$ удовлетворяют условиям теоремы Коши, а тогда $\exists \xi \in (a, x)$:

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$



Если $x \rightarrow a+0 \Rightarrow \xi \rightarrow a+0$ по принципу сжатой переменной, а тогда

$$\exists \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \rightarrow a+0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = k.$$

Замечания

- Аналогично формулируется и доказывается теорема, когда $x \rightarrow a-0$.
- Если $x \rightarrow a$, то правило Лопиталья следует из доказанной теоремы 5 и предыдущего замечания.
- Правило Лопиталья остается справедливым и при $x \rightarrow \infty$.
- Правило Лопиталья, рассмотренное выше, применяется при раскрытии неопределенности $\left[\frac{0}{0} \right]$, но оно остается в силе и в случае неопределенности $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

- Правило Лопиталя справедливо также, если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$.
- Если же не существует $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то применение правила Лопиталя может привести к ошибочному выводу. Главное, чтобы предел отношения производных существовал, пусть даже он равен бесконечности.

Разработал доцент кафедры высшей математики М. В. Лагунова