

Раздел № 05 Д и ф ф е р е н ц и а л ь н о е

и с ч и с л е н и е

Тема № 03 Производные высших порядков. Формула

Тейлора.

Лекция № 21

Учебные вопросы:

1. Введение.
2. Производные и дифференциалы высших порядков.
3. Формула Тейлора для многочлена.
4. Формула Тейлора для гладких функций.
5. Разложение основных элементарных функций по формуле Маклорена.

Литература

1. Сборник задач по математике в четырех частях. Под общей редакцией А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича
2. Б.П. Демидович. Краткий курс высшей математики.
3. Л.Д. Кудрявцев. Курс математического анализа.
4. Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин. Сборник задач по математическому анализу. Т. 1-3.

1. Введение

На этой лекции мы выведем формулу Тейлора, с помощью которой мы сможем вычислять с любой степенью точности приближенные значения элементарных функций. Эта формула является одним из центральных инструментов в математическом анализе и многих его приложениях.

2. Производные и дифференциалы высших порядков.

Определение 1. Пусть дана функция $y = f(x)$, имеющая производную $f'(x)$. Производная от первой производной называется второй производной:

$$(f'(x))' = f''(x) = y''(x) \text{ или } \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{d^2f}{dx^2},$$

третья производная – это производная от второй производной и так далее.

$$y''' = (y'')', \dots, y^{(n)} = (y^{(n-1)})' \text{ или } \frac{d^n f}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}\right).$$

Методом математической индукции можно вывести формулы для производных порядка n некоторых элементарных функций, например:

- $(e^x)^{(n)} = e^x$
- $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$
- $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$
- $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$

Определение 2. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 . Дифференциал от первого дифференциала называется вторым дифференциалом. При этом приращение аргумента dx считается фиксированным.

$$d^2f(x_0) = d(df(x_0)).$$

Выведем формулу для второго дифференциала.

$$d^2f = d(df) = d(f'dx) = df' \cdot dx + f' \cdot d(dx) = ((f')'dx)dx = f''(dx)^2.$$

При выводе этой формулы мы использовали формулу для первого дифференциала, формулу дифференциала произведения и тот факт, что dx считается постоянной величиной.

Замечание. Можно проверить, что второй дифференциал не обладает свойством инвариантности формы. Если переменная x не является независимой переменной, а является функцией переменной t , $x = \varphi(t)$, то

$$d^2f = d(df) = d(f'dx) = f''(dx)^2 + f'd^2x, d^2x \neq 0.$$

3. Формула Тейлора для многочлена.

Пусть есть многочлен степени n : $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, разложим его по степеням $(x - x_0)$. Это означает, что данный многочлен нужно представить в виде:

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + A_3(x - x_0)^3 + \dots + A_n(x - x_0)^n \quad (1)$$

В равенстве (1) положим $x = x_0$, получим $P_n(x_0) = A_0$. Продифференцируем (1):

$$P'_n(x) = A_1 + 2A_2(x - x_0) + 3A_3(x - x_0)^2 + \dots + nA_n(x - x_0)^{n-1} \quad (2)$$

Снова возьмем $x = x_0$. Получим $P'_n(x_0) = A_1$. Продифференцируем (2):

$$P''_n(x) = 2A_2 + 3 \cdot 2A_3(x - x_0) + \dots + n(n-1)A_n(x - x_0)^{n-2} \quad (3)$$

При $x = x_0$ получим $P''_n(x_0) = 2A_2 \Rightarrow A_2 = \frac{P''_n(x_0)}{2}$. Следующий коэффициент

искомого многочлена $A_3 = \frac{P'''_n(x_0)}{3 \cdot 2}$.

Методом математической индукции можно показать, что каждый коэффициент $A_k = \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}$, если $k \leq n$. Следующие производные уже будут равны нулю. Мы получим:

$$P_n(x) = P_n(x_0) + \frac{P_n'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{P_n''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad (4)$$

Формула (4) и называется формулой Тейлора для многочлена. В короткой форме ее можно записать так:

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

4. Формула Тейлора для гладких функций.

Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0 и имеет в этой точке производные до порядка n включительно. Следуя формуле (4), запишем формально многочлен:

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

который называется многочленом Тейлора для функции $f(x)$. Заметим, что

$$T_n(x_0) = f(x_0), T_n'(x_0) = f'(x_0), \dots, T_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0),$$

то есть значение многочлена, а также значения всех его производных до порядка n в точке x_0 совпадают. Возможны два случая:

1) $f(x)$ – многочлен степени $k \leq n$, тогда $f(x) \equiv T_n(x)$;

2) $f(x)$ – многочлен степени $k > n$, тогда $f(x) \neq T_n(x)$.

Это означает, что $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, или

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x) \quad (5)$$

Формула (5) называется формулой Тейлора для функции $f(x)$, а функция $R_n(x)$ называется остаточным членом в формуле Тейлора.

Заметим, что $R_n(x_0) = R_n'(x_0) = \dots = R_n^{(n)}(x_0) = 0$. Это нам пригодится в дальнейшем.

Остаточный член формулы Тейлора в форме Пеано

Рассмотрим $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n}$, вычислим его с помощью правила Лопиталя:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n'(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n''(x)}{n(n-1)(x - x_0)^{n-2}} = \\ &= \dots = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n^{(n)}(x)}{n!} = 0 \Rightarrow \boxed{R_n(x) = o((x - x_0)^n) \text{ при } x \rightarrow x_0}. \end{aligned}$$

Остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа

Пусть функция $f(x)$ имеет в $U(x_0)$ производные до порядка $n + 1$. Рассмотрим частное:

$$\frac{R_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{R_n(x) - R_n(x_0)}{(x - x_0)^{n+1} - (x_0 - x_0)^{n+1}}.$$

Здесь мы использовали тот факт, что $R_n(x_0) = 0$ и, разумеется, $(x_0 - x_0)^{n+1} = 0$. Применим формулу Коши для функций $R_n(x)$ и $(x - x_0)^{n+1}$ для отрезка с концами x и x_0 :

$$\frac{R_n(x) - R_n(x_0)}{(x - x_0)^{n+1} - (x_0 - x_0)^{n+1}} = \frac{R'_n(x_1)}{(n+1)(x_1 - x_0)^n},$$

где точка x_1 лежит между x и x_0 . Продолжим таким же образом, ссылаясь на формулу Коши и используя равенство нулю производных до порядка n остаточного члена:

$$\begin{aligned} \frac{R'_n(x_1)}{(n+1)(x_1 - x_0)^n} &= \frac{R'_n(x_1) - R'_n(x_0)}{(n+1)[(x_1 - x_0)^n - (x_0 - x_0)^n]} = \frac{R''_n(x_2)}{(n+1)n(x_2 - x_0)^{n-1}} = \\ &= \dots = \frac{R_n^{(n)}(x_n) - R_n^{(n)}(x_0)}{(n+1)! [(x_n - x_0) - (x_0 - x_0)]} = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \end{aligned}$$

каждая следующая точка x_k находится в интервале с концами x_{k-1} и x_0 (Рис. 1), а точка ξ находится в интервале с концами x_n и x_0

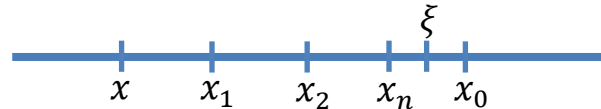


Рис. 1.

Заметим, что $f^{(n+1)}(x) = R_n^{(n+1)}(x)$, и получим остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1},$$

где точка ξ – некоторая точка между точками x и x_0 . При этом могут получиться оба случая: $x > x_0$ или $x < x_0$. Этот факт удобно записать с помощью одной формулы:

$$\xi = x_0 + \theta(x - x_0), \theta \in (0, 1).$$

Замечание. Есть и другие формы записи остаточного члена формулы Тейлора, например, остаточный член в интегральной форме, в форме Коши, в форме Шлёмильха-Роша.

5. Разложения основных элементарных функций по формуле Маклорена.

Если в формуле Тейлора (5) положить $x_0 = 0$, то полученная формула носит название формулы Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n) \quad (6)$$

Для удобства мы взяли остаточный член в форме Пеано, $o(x^n)$ при $x \rightarrow 0$, это будет относиться ко всем полученным в дальнейшем разложениям некоторых важных элементарных функций по формуле Маклорена.

- 1) Разложим по формуле (6) функцию $f(x) = e^x$. Очевидно, любая ее производная также равна e^x , то есть $f^{(k)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(k)}(0) = e^0 = 1$, и мы получим:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

- 2) Разложим по формуле (6) функцию $f(x) = \sin x$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x \Rightarrow f(0) = 0, \\ f'(x) &= \cos x \Rightarrow f'(0) = 1, \\ f''(x) &= -\sin x \Rightarrow f''(0) = 0, \\ f'''(x) &= -\cos x \Rightarrow f'''(0) = -1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

В результате получим:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}).$$

3) Разложим по формуле (6) функцию $f(x) = \cos x$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x \Rightarrow f(0) = 1, \\ f'(x) &= -\sin x \Rightarrow f'(0) = 0, \\ f''(x) &= -\cos x \Rightarrow f''(0) = -1, \\ f'''(x) &= \sin x \Rightarrow f'''(0) = 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

В результате получим:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).$$

4) Разложим по формуле (6) функцию $f(x) = \ln(1+x)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1+x) \Rightarrow f(0) = 0, \\ f'(x) &= \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \Rightarrow f'(0) = 1, \\ f''(x) &= (-1)(1+x)^{-2} \Rightarrow f''(0) = -1, \\ f'''(x) &= (-1)(-2)(1+x)^{-3} \Rightarrow f'''(0) = (-1)^2 2!, \\ f^{(4)}(x) &= (-1)(-2)(-3)(1+x)^{-4} \Rightarrow f^{(4)}(0) = (-1)^3 3!, \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} (n-1)! (1+x)^{-n} \Rightarrow f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} (n-1)!$$

В результате получим:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

5) Разложим по формуле (6) функцию $f(x) = (1+x)^\mu$.

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^\mu \Rightarrow f(0) = 1, \\ f'(x) &= \mu(1+x)^{\mu-1} \Rightarrow f'(0) = \mu, \\ f''(x) &= \mu(\mu-1)(1+x)^{\mu-2} \Rightarrow f''(0) = \mu(\mu-1), \\ f'''(x) &= \mu(\mu-1)(\mu-2)(1+x)^{\mu-3} \Rightarrow f'''(0) = \mu(\mu-1)(\mu-2), \\ f^{(k)}(x) &= \mu(\mu-1)(\mu-2) \dots (\mu-(k-1))(1+x)^{\mu-k} \Rightarrow \\ &\Rightarrow f^{(k)}(0) = \mu(\mu-1)(\mu-2) \dots (\mu-k+1). \end{aligned}$$

В результате получим:

$$\begin{aligned} (1+x)^\mu &= 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2!} x^2 + \dots + \\ &+ \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3) \dots (\mu-n+1)}{n!} x^n + o(x^n). \end{aligned}$$

Замечания

- Благодаря приведенным выше разложениям, мы можем вычислять пределы функций, решать дифференциальные уравнения, брать неберущиеся интегралы, выполнять приближенные вычисления значений различных функций с любой степенью точности.
- Приведенные выше разложения для основных элементарных функций можно применять для аналогичных разложений других функций, причем не обязательно в окрестности нуля.
- С помощью последнего разложения можно вывести формулу бинома Ньютона.

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2 \cdot 1}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1}a^{n-3}b^3 + \\ + \dots + \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}a^{n-k}b^k + \dots + b^n, n \in \mathbb{N}.$$

Разработал доцент кафедры высшей математики М. В. Лагунова