

Раздел № 05 Д и ф ф е р е н ц и а л ь н о е
и с ч и с л е н и е

Тема № 04 Исследование функции и построение
графика.

Лекция № 22

Учебные вопросы:

1. Введение.
2. Условия постоянства, возрастания и убывания функции.
3. Экстремумы функции.
4. Выпуклость графика функции и точки перегиба.
5. Асимптоты графика функции.
6. Гиперболические функции, построение их графиков.

Литература

1. Сборник задач по математике в четырех частях. Под общей редакцией А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича
2. Б.П. Демидович. Краткий курс высшей математики.
3. Л.Д. Кудрявцев. Курс математического анализа.
4. Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин. Сборник задач по математическому анализу. Т. 1-3.

1. Введение

На этой лекции мы применим полученные знания для исследования поведения функций, а также введем еще один класс элементарных функций – гиперболические функции. Найдем их производные и построим графики.

2. Условия постоянства, возрастания и убывания функции.

Определение 1. Функция $f(x)$ постоянна на промежутке $\langle a, b \rangle$, если

$$\forall x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle \Rightarrow f(x_1) = f(x_2).$$

Теорема 1. (Необходимое и достаточное условие постоянства)

Пусть функция $f(x)$ определена на $[a, b]$ и имеет производную при $\forall x \in (a, b)$.

$$f(x) \text{ постоянна на } [a, b] \Leftrightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b).$$

Доказательство

Необходимость

Пусть $f(x) = \text{Const} \Rightarrow f'(x) = 0$ при $\forall x \in (a, b)$.

Достаточность

Пусть $f'(x) = 0$ при $\forall x \in (a, b)$, тогда $f(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Лагранжа на любом отрезке, лежащем внутри $[a, b]$. Возьмем произвольные точки x_1, x_2 : $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ и применим формулу Лагранжа для отрезка $[x_1, x_2]$: $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$, где точка $\xi \in (x_1, x_2)$. Поскольку $f'(x) = 0$ при $\forall x \in (a, b)$, то $f(x_1) = f(x_2)$, то есть функция постоянна на $[a, b]$.

Определение 2. Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $\langle a, b \rangle$, если для $\forall x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle$: $x_1 < x_2$ выполняется условие:

- $f(x_1) \leq f(x_2)$, то функция называется возрастающей на $\langle a, b \rangle$;
- $f(x_1) \geq f(x_2)$, то функция называется убывающей на $\langle a, b \rangle$;
- $f(x_1) < f(x_2)$, то функция называется строго возрастающей на $\langle a, b \rangle$;
- $f(x_1) > f(x_2)$, то функция называется строго убывающей на $\langle a, b \rangle$.

Во всех перечисленных выше случаях функция называется монотонной на промежутке $\langle a, b \rangle$.

Теорема 2. (Необходимое и достаточное условие монотонности)

Пусть функция $f(x)$ определена на $[a, b]$ и имеет производную при $\forall x \in (a, b)$.

$$1) f(x) \text{ возрастает на } [a, b] \Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b).$$

$$2) f(x) \text{ убывает на } [a, b] \Leftrightarrow f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, b).$$

Доказательство. Докажем утверждение 1). Второе утверждение доказывается аналогично.

Необходимость

Пусть $f(x)$ возрастает на $[a, b]$. Возьмем произвольную точку $x_0 \in (a, b)$ и отличное от нуля число Δx такое, что $x_0 + \Delta x \in (a, b)$. Возможны два случая:

1. $\Delta x > 0 \Rightarrow x_0 + \Delta x > x_0$, а тогда $f(x_0 + \Delta x) \geq f(x_0)$ и частное $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$.
2. $\Delta x < 0 \Rightarrow x_0 + \Delta x < x_0$, а тогда и частное $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$.

При переходе к пределу неравенства сохраняются, и мы получим:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0.$$

Достаточность

Пусть теперь $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$. $f(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Лагранжа на любом отрезке, лежащем внутри $[a, b]$. Возьмем произвольные точки

$x_1, x_2: a \leq x_1 < x_2 \leq b$ и применим формулу Лагранжа для отрезка $[x_1, x_2]$: $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$, где точка $\xi \in (x_1, x_2)$. Поскольку $f'(x) \geq 0$ при $\forall x \in (a, b)$, то $f'(\xi) \geq 0 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$, то есть функция возрастает на $[a, b]$.

Теорема 3. (Достаточное условие строгой монотонности)

Пусть функция $f(x)$ определена на $[a, b]$ и имеет производную при $\forall x \in (a, b)$.

- 1) Если $f'(x) > 0$ при $\forall x \in (a, b) \Rightarrow f(x)$ строго возрастает на $[a, b]$.
- 2) Если $f'(x) < 0$ при $\forall x \in (a, b) \Rightarrow f(x)$ строго убывает на $[a, b]$.

Доказательство 1) утверждения.

Возьмем произвольные точки $x_1, x_2: a \leq x_1 < x_2 \leq b$ и применим формулу Лагранжа для отрезка $[x_1, x_2]$:

$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$, где точка $\xi \in (x_1, x_2) \Rightarrow f'(\xi) > 0$, а тогда разность $f(x_2) - f(x_1) > 0 \Leftrightarrow f(x_2) > f(x_1)$.

Замечание. Обратные теоремы не верны, то есть из строгой монотонности не следует постоянство знака производной. Примером может служить хорошо известная функция $f(x) = x^3$, которая строго возрастает, однако $f'(0) = 0$.

3. Экстремумы функции.

Определение 3. Пусть область определения функции $D(f) = \langle a, b \rangle$.

- $f(x)$ имеет в точке $x_0 \in \langle a, b \rangle$ локальный максимум, если существует $U(x_0)$, такая что $\forall x \in U(x_0) \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$.
- $f(x)$ имеет в точке $x_0 \in \langle a, b \rangle$ локальный минимум, если существует $U(x_0)$, такая что $\forall x \in U(x_0) \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$.
- $f(x)$ имеет в точке $x_0 \in \langle a, b \rangle$ строгий локальный максимум, если существует $U(x_0)$, такая что $\forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0) \Rightarrow f(x) < f(x_0)$.
- $f(x)$ имеет в точке $x_0 \in \langle a, b \rangle$ строгий локальный минимум, если существует $U(x_0)$, такая что $\forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0) \Rightarrow f(x) > f(x_0)$.

Точка, в которой функция имеет локальный максимум или минимум, называется точкой локального экстремума, а значение функции в этой точке называется локальным экстремумом.

Теорема 4. (Необходимое условие экстремума)

Пусть x_0 — точка экстремума функции, тогда выполняется одно условие из трех:

$$\begin{cases} f'(x_0) = 0, \\ \nexists f'(x_0), \\ f'(x_0) = \infty. \end{cases}$$

Доказательство

Пусть x_0 — точка экстремума функции. Возможны 3 случая:

1. $\nexists f'(x_0)$.

2. $f'(x_0) = \infty$.
3. Существует конечная $f'(x_0)$, а тогда по теореме Ферма $f'(x_0) = 0$.

Определение 4. Точки, в которых выполняется необходимое условие экстремума, называются критическими точками первой производной или точками, подозрительными на экстремум. Если же $f'(x_0) = 0$, то такая точка называется еще стационарной точкой функции.

Определение 5. Согласно теореме 4, различают три вида экстремумов, изображенных на рисунке 1.

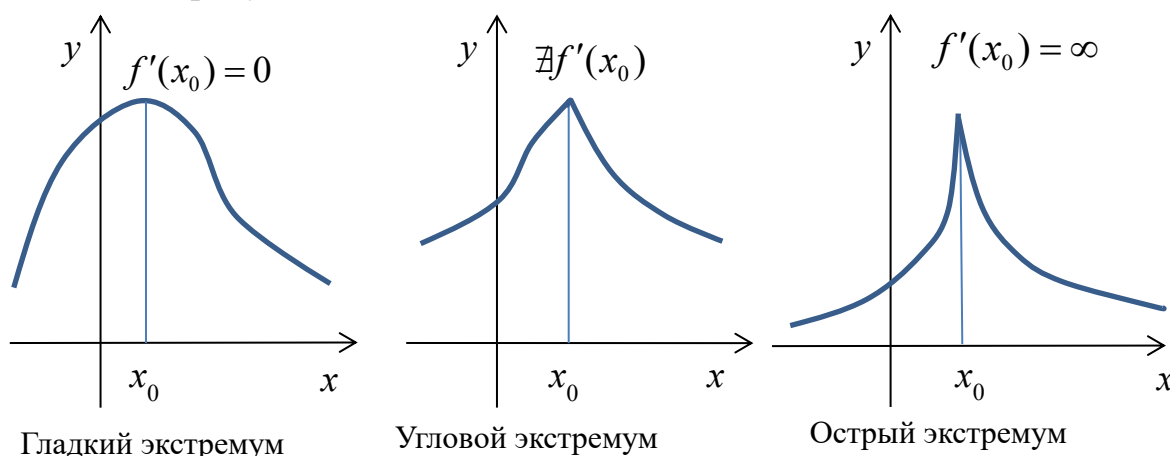


Рис. 1

Замечание. Ни одно из условий теоремы 4 не является достаточным для того, чтобы функция имела локальный экстремум в точке x_0 . Это можно увидеть на рисунке 2.

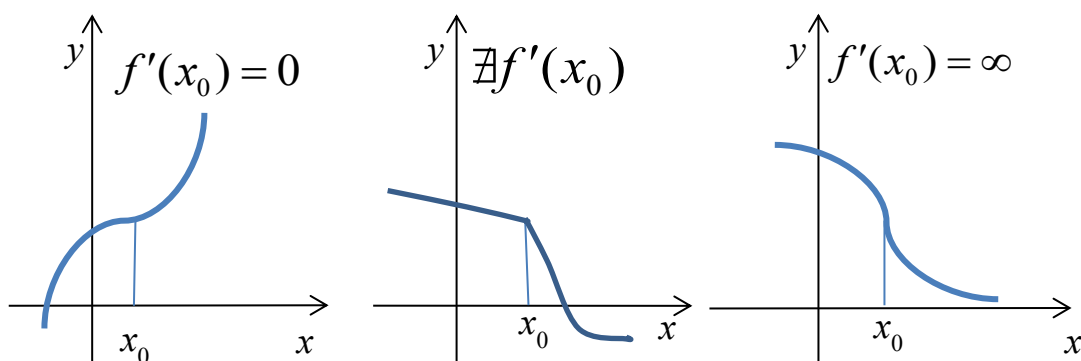


Рис. 2

Теорема 5. (Первое достаточное условие локального экстремума)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в окрестности $U(x_0)$, дифференцируема в проколотой окрестности $U(x_0)$, причем производная $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0 , как показано на рисунках 3 и 4, то x_0 — точка локального экстремума, при этом в первом случае (Рис. 3) x_0 — точка локального максимума, во втором случае (Рис. 4) x_0 — точка локального минимума.

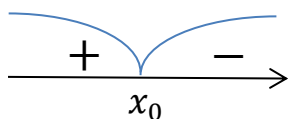


Рис.3

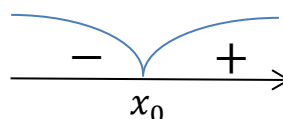


Рис.4

Доказательство

Рассмотрим первый случай (Рис 3). Возьмем произвольную точку $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$ и запишем формулу Лагранжа для отрезка, заключенного между точками x и x_0 :

$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$, где точка ξ лежит между x и x_0 . При этом, если $x < x_0$, то $f'(\xi) > 0$, а тогда $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) < 0 \Rightarrow f(x) < f(x_0)$.

Если же $x > x_0$, то $f'(\xi) < 0$, а тогда $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) > 0$, из чего также следует, что $f(x) < f(x_0)$. То есть всегда для любых $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$ следует, что $f(x) < f(x_0)$, то есть x_0 — точка локального максимума. Аналогично доказывается вторая часть теоремы.

Теорема 6. (Достаточное условие гладкого экстремума)

$$\left. \begin{array}{l} f'(x_0) = 0, \\ \exists f''(x_0), \\ f''(x_0) \neq 0. \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \text{Если } f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0 \text{ — точка локального максимума.} \\ \text{Если } f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0 \text{ — точка локального минимума.} \end{cases}$$

Доказательство

Для доказательства этой теоремы разложим функцию $f(x)$ в окрестности точки x_0 по формуле Тейлора порядка 2 с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2).$$

Поскольку $f'(x_0) = 0$, линейный член равен нулю, то есть

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2),$$

причем при значениях x , достаточно близких к x_0 , второе слагаемое в правой части не может повлиять на знак. То есть найдется такая окрестность точки x_0 , $\overset{\circ}{U}(x_0)$ в которой знак разности $f(x) - f(x_0)$ зависит только от знака второй производной в точке x_0 . При этом $f(x) - f(x_0) > 0$, если $f''(x_0) > 0$, или $f(x) > f(x_0)$ для любых $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$; $f(x) - f(x_0) < 0$, если $f''(x_0) < 0$, или $f(x) < f(x_0)$ для любых $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$.

Определение 6. Пусть функция $f(x)$ определена на множестве $X \subset \mathbb{R}$. Наибольшее значение, которого эта функция достигает на множестве X , называется глобальным максимумом. Аналогично, наименьшее значение, которого эта функция достигает на множестве X , называется глобальным минимумом.

Как известно из второй теоремы Вейерштрасса, если функция непрерывна на отрезке, то она достигает своего наибольшего и наименьшего значений (то есть глобальных экстремумов). Причем, экстремальных значений функция может достигать либо в точках локального экстремума, лежащих внутри отрезка, либо на его концах. Заметим, что при исследовании функции на глобальный экстремум, достаточно найти критические точки, лежащие внутри рассматриваемого отрезка, вычислить значения функции в этих точках и сравнить их со значениями функции в концах отрезка. Среди найденных значений и будут искомые глобальные экстремумы.

4. Выпуклость графика функции и точки перегиба.

Будем считать, что функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0 (конечную или бесконечную), то есть существует касательная (возможно, вертикальная) к графику функции в точке x_0 . Пусть Γf — график функции.

Определение 7. Кривая Γf выпукла вверх в точке $M(x_0, f(x_0))$, если в некотором круге с центром в точке M касательная к Γf лежит выше графика. См. Рис. 5.

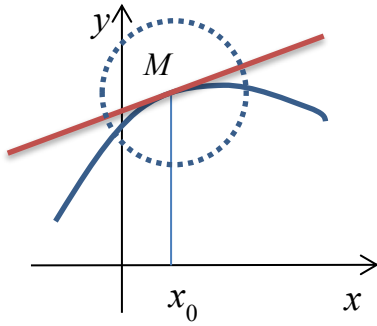


Рис. 5

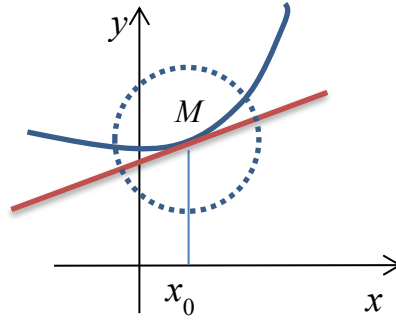


Рис. 6

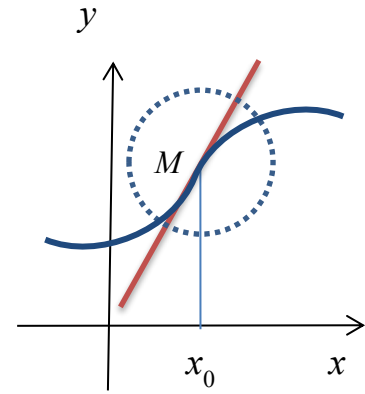


Рис. 7

Определение 8. Кривая Γf выпукла вниз в точке $M(x_0, f(x_0))$, если в некотором круге с центром в точке M касательная к Γf лежит ниже графика. См. Рис. 6.

Определение 9. Точка $M(x_0, f(x_0))$ называется точкой перегиба графика функции, если в ней изменяется направление выпуклости. См. Рис. 7.

Выясним условия, при которых имеет место определенное направление выпуклости или перегиб. Предположим, что функция $f(x)$ имеет две производные в точке x_0 , а следовательно, непрерывна и имеет касательную к графику в точке $M(x_0, f(x_0))$. Уравнение касательной имеет вид: $Y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Чтобы не путать ординаты графика функции $y = f(x)$, мы обозначили ординату касательной буквой Y . Рассмотрим разность текущих ординат графика функции и его касательной в точке x_0 : $y - Y = y - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$. Разложим функцию $f(x)$ по формуле Тейлора первого порядка с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2,$$

где точка ξ лежит между x и x_0 . А тогда $y - Y = \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2$, то есть разность текущих ординат графика и касательной определяется знаком второй производной в точке ξ . Предположим также, что вторая производная $f''(x)$ непрерывна в точке x_0 . Тогда возможны следующие три случая:

- 1) $f''(x_0) > 0$, а тогда, по непрерывности $f''(x)$, существует целая окрестность, в которой вторая производная имеет тот же знак, что означает $y - Y > 0$ в этой окрестности, то есть график функции лежит выше касательной, или кривая Γf выпукла вниз.
- 2) $f''(x_0) < 0$, а тогда существует окрестность, в которой вторая производная имеет тот же знак, что означает $y - Y < 0$ в этой окрестности, то есть график функции лежит ниже касательной, или кривая Γf выпукла вверх.
- 3) $f''(x_0) = 0$. Если при этом в точке x_0 вторая производная меняет знак, то график функции будет иметь точку перегиба. Если же знак второй производной не изменится, то перегиба нет.

Замечание. Перегиб возможен и в случае, когда первая производная бесконечна, а вторая, соответственно, не существует. Например, график функции $y = \sqrt[3]{x}$ имеет

перегиб в точке $(0, 0)$.

5. Асимптоты графика функции.

Прежде всего, заметим, что асимптоты существуют лишь у тех кривых, ветви которых «уходят в бесконечность», то есть если точка M , двигаясь вдоль кривой, может удалиться сколь угодно далеко от начала координат.

Определение 10. Прямая линия l называется асимптотой графика функции Γf , если $\text{dist}(M, l) \xrightarrow[M \in \Gamma f]{|MO| \rightarrow \infty} 0$, то есть расстояние от точки $M \in \Gamma f$ до асимптоты стремится к

нулю при движении точки вдоль графика в бесконечность.

Сделаем несколько важных замечаний. Попробуйте самостоятельно проиллюстрировать данные высказывания рисунками.

1. График функции может пересекать свою асимптоту, касаться ее и даже совпадать со своей асимптотой.
2. Асимптоты могут быть наклонными, вертикальными или горизонтальными.
3. Вертикальную асимптоту график функции пересекать не может. Вертикальных асимптот у графика может быть сколько угодно.
4. Общее количество наклонных и горизонтальных асимптот может быть не больше двух: одна асимптота на минус бесконечности, вторая – на плюс бесконечности.
5. График периодической функции не может иметь ни горизонтальных, ни наклонных асимптот. В этом случае могут быть только вертикальные асимптоты, причем их бесконечно много.

Вертикальные асимптоты

Покажем, что если $\lim_{x \rightarrow x_0 \pm 0} f(x) = \infty$, то прямая $x = x_0$ является вертикальной асимптотой Γf (см. рис. 8).

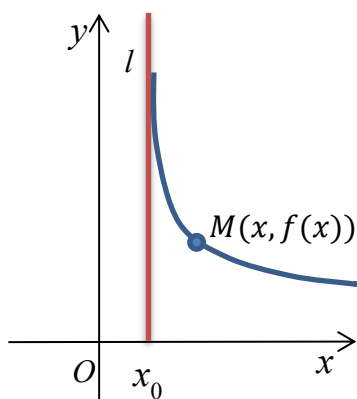


Рис. 8

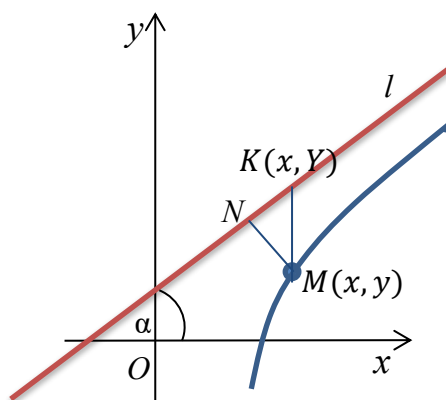


Рис. 9

$\text{dist}(M, l) = |x - x_0|$, при этом $|OM| \rightarrow \infty$, при $x \rightarrow x_0$, а тогда $|x - x_0| = \text{dist}(M, l) \rightarrow 0$.

Наклонные асимптоты

Пусть теперь Γf имеет наклонную асимптоту, например, на плюс бесконечности. См. Рис. 9. Эту прямую назовем l_+ и найдем условия, при которых прямая $Y = kx + b$ является асимптотой к графику функции $y = f(x)$. Здесь, как и в предыдущем параграфе, мы обозначили разными буквами текущие ординаты графика функции и его асимптоты. $\text{dist}(M, l) = |MN| = |MK| \cos \alpha = |y - Y| \cos \alpha$.

Таким образом, $\text{dist}(M, l) \rightarrow 0 \Leftrightarrow y - Y \rightarrow 0$, то есть выполняется условие:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx - b) = 0. \quad (1)$$

Условие (1) является необходимым и достаточным условием того, чтобы прямая l_+ являлась наклонной асимптотой для графика функции $y = f(x)$ при x , стремящемся к плюс бесконечности. Чтобы найти искомые числа k и b , часто удобнее пользоваться другими формулами. Так, из формулы (1) имеем: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - kx - b}{x} = 0$, из которой сразу следует, что

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad (2)$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx). \quad (3)$$

Аналогично можно найти и асимптоту на минус бесконечности, если, конечно, она существует.

Горизонтальные асимптоты

Если при вычислении предела (2) получилось $k = 0$, и при этом $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$, то горизонтальная прямая $y = b$ на плюс бесконечности является асимптотой графика функции. Часто это можно увидеть сразу, если $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$, то сразу можно говорить о наличии горизонтальной асимптоты на плюс бесконечности. Аналогично и в случае минус бесконечности.

Разработал доцент кафедры высшей математики М. В. Лагунова