ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский
политехнический университет
Петра Великого

Раздел № 1 Линейная алгебра

Тема № 3 Матрицы и операции с ними.

Лекция № 3

Учебные вопросы:

1. Введение.
2. Линейное пространство числовых матриц.
3. Умножение матриц и его свойства.
4. Транспонирование матриц и его свойства.
5. Обратные матрицы и их свойства

Литература

1. Сборник задач по математике в четырех частях. Под общей редакцией А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича
2. Б.П. Демидович. Краткий курс высшей математики.
3. А.Е. Умнов. Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

1. Введение

На предыдущей лекции мы познакомились с минорами, алгебраическими дополнениями, а также с определителями высших порядков. Заметим, что определители существуют только у квадратных матриц. Перейдем теперь к изучению матриц произвольного размера.

2. Линейное пространство числовых матриц.

Определение 1. Числовой матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, a_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Обычно матрицы обозначаются большими латинскими буквами, а ее элементы – теми же буквами, но прописными. Как обычно, первый индекс обозначает номер строки, второй индекс – номер столбца, в котором находится элемент a_{ij}. Матрицу коротко обозначают (a_{ij}), а если важно знать размеры матрицы, то пишут $A_{m\times n}$.

Определение 2. Две матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2l} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kl} \end{pmatrix}$$

называются равными, если они имеют одинаковые размеры, при этом соответствующие элементы равны, то есть

$$A_{m\times n} = B_{k\times l} \Leftrightarrow \begin{cases} m = k, \\ n = l, \\ a_{ij} = b_{ij}, i = 1,2,\dots,m, j = 1,2,\dots,n. \end{cases}$$

Замечания.

- При $m=n$ матрица называется квадратной.
- Квадратная матрица называется *диагональной*, если все её элементы равны нулю, кроме находящихся на главной диагонали
- Единичные матрицы – частный случай диагональных матриц, в них все элементы, находящиеся на главной диагонали, равны 1.

Линейные операции с матрицами

Определение 3. Суммой двух матриц A и B одинакового размера называется матрица C того же размера, элементы которой есть суммы соответствующих элементов матриц слагаемых, т. е. $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, i = 1,2,\dots,m, j = 1,2,\dots,n$.

$$C = A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Определение 4. Произведением матрицы A размера $m\times n$ на вещественное число λ называется матрица того же размера, обозначаемая λA, элементы которой есть произведения соответствующих элементов матрицы A на это число λ.

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Свойства линейных операций с матрицами

1) $A + B = B + A$ **(коммутативность суммы)**

2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ **(ассоциативность суммы)**

3) Для любой матрицы A существует единственная матрица, называемая нуль-матрицей O, такая что $A + 0 = A$.

4) Для любой матрицы A существует единственная матрица ($-A$), называемая противоположной, такая что $A + (-A) = O$.

5) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$, где $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$.

6) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$

7) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

8) $1 \cdot A = A$

Важные замечания

- Все эти равенства понимаются в том смысле, что если определена левая часть равенства, то определена и правая, и наоборот.
- Для вещественных чисел все эти свойства 1) – 8) являются аксиомами. В случае матриц они требуют доказательств.
- Множество математических объектов, на котором определены операции сложения и умножения на число, при этом выполняются свойства 1) – 8), называется **линейным пространством**.
- Множество матриц одинакового размера $m \times n$ является линейным пространством, которое обычно обозначается $\mathfrak{M}_{m\times n}$.

3. Умножение матриц и его свойства.

Начнем с частного случая умножения матрицы-строки на матрицу-столбец.

Определение 5. Произведением матрицы $A_{1\times n}$ на матрицу $B_{n\times 1}$ называется матрица $C_{1\times 1}$, ее единственный элемент

$$c_{11} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i$$

$$C = AB = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)$$

Определение 6. Произведением матрицы A размера $m\times k$ на матрицу B размера $k\times n$ называется матрица C размера $m\times n$, элемент которой c_{ij}, стоящий в i-ой строке и в j-ом столбце, равен сумме произведений соответствующих элементов i-ой строки матрицы A и j-ого столбца матрицы B:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj} = \sum_{\mu=1}^{k} a_{i\mu}b_{\mu j}$$

Чтобы найти элемент c_{ij} нужно умножить i-ю строку матрицы A, которая записана слева, на j-ый столбец матрицы B, записанной в произведении справа. Правило умножения матриц изображено на следующем рисунке 1.

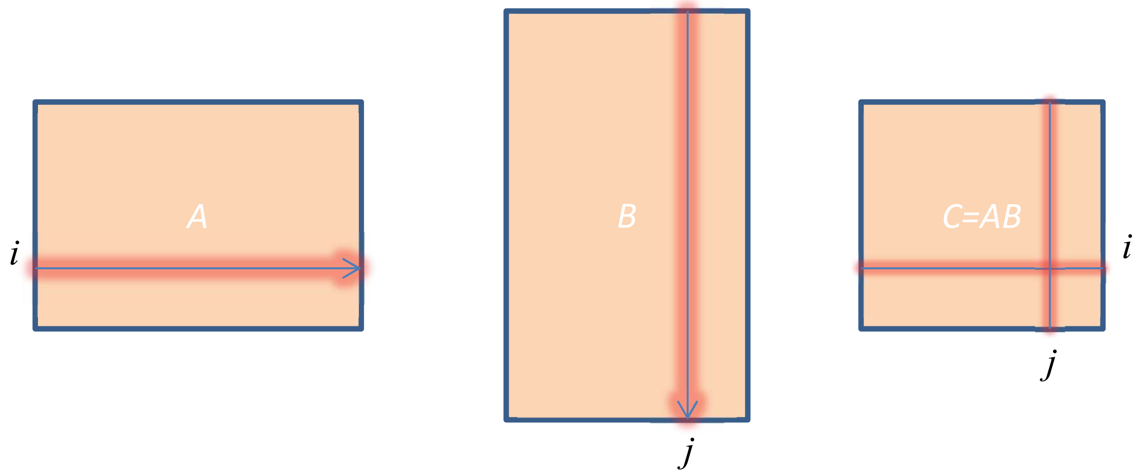

Рис. 1. Правило умножения матриц.

Замечание. Легко заметить, что в зависимости от размеров матриц, возможна ситуация, что их произведение или не определено, или, возможно, матрицы в произведении нельзя переставлять местами. Либо не будут соответствовать их размеры, либо в результате умножения будут получаться матрицы разных размеров. И даже в случае, когда умножаются квадратные матрицы одинакового порядка, результат может оказаться разным. Так что коммутативности матричного умножения нет, то есть в общем случае $AB \neq BA$. Если же $AB = BA$, то такие матрицы называются коммутирующими.

Свойства матричного умножения

1) $(AB)C = A(BC)$ **(ассоциативность умножения)**
2) $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$, где $\lambda \in \mathbb{R}$
3) $(A + B)C = AB + BC$ **(дистрибутивность при умножении справа)**
4) $A(B + C) = AB + AC$ **(дистрибутивность при умножении слева)**
5) Если матрица A имеет размер $m{\times}n$, то равенство $E_m A = AE_n = A$ справедливо только, если E_m, E_n – единичные матрицы m-го и n-го порядка.

Теорема 1. (Об определителе произведения двух квадратных матриц)

Если A и B – квадратные матрицы n-го порядка, то

$$\det AB = \det A \cdot \det B$$

4. Транспонирование матриц.

Определение 7. Пусть дана матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, матрица

$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ является транспонированной по отношению к матрице A.

Элементы транспонированной матрицы обозначаются a_{ij}^T. Заметим, что $a_{ij}^T = a_{ji}$.

Свойства операции транспонирования

1) $(A^T)^T = A$
2) $(A + B)^T = A^T + B^T$
3) $(\lambda A)^T = \lambda A^T, \lambda \in \mathbb{R}$
4) $(AB)^T = B^T A^T$

5. Обратная матрица.

Замечание. Итак, мы научились определять равенство матриц, складывать матрицы одинаковых размеров, умножать любую матрицу на число, транспонировать матрицы, а также умножать матрицы подходящих размеров. Но, важно понимать, что делить на матрицу нельзя. В некоторых случаях можно применять операцию, напоминающую деление, – умножение на обратную матрицу.

Определение 7. Пусть A – квадратная матрица. Обратной матрицей называется матрица A^{-1}, такая, что $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Теорема 2. (Необходимое условие существования обратной матрицы)

Если квадратная матрица A имеет обратную, то $\det A \neq 0$.

Доказательство: $\det(AA^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1} = \det E = 1 \Rightarrow \det A \neq 0$

Определение 8. Квадратная матрица, определитель которой отличен от нуля, называется неособенной или невырожденной.

Следствие из теоремы 2. Если матрица вырожденная, то она не имеет обратной.

Теорема 3. (О существовании и единственности обратной матрицы)

Всякая невырожденная квадратная матрица A n-го порядка имеет единственную обратную матрицу A^{-1}, для которой справедливо равенство

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A.

(Доказательство теоремы проводится непосредственно с использованием теоремы о разложении определителя по строке (столбцу) и следствия из этой теоремы.) Единственность доказывается от противного.)

<u>Замечания.</u>

- Матрица $A^V = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$ называется присоединенной к матрице A. Это транспонированная матрица алгебраических дополнений.
- Матрица, обратная к квадратной невырожденной матрице второго порядка находится очень просто. Элементы, стоящие на главной диагонали, меняются местами, а элементы побочной диагонали меняют знак. И не забываем умножить на число, обратное определителю этой матрицы. Например,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Свойства обратной матрицы

1) $(A^{-1})^{-1} = A$

2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

3) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

4) $E^{-1} = E$

5) $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$

6) Матрица, обратная к диагональной матрице, тоже диагональная.

7) Матрица, обратная к треугольной матрице, тоже треугольная.

Разумеется, все перечисленные выше свойства касаются квадратных невырожденных матриц, при этом матрицы A и B имеют одинаковые размеры.

Разработал доцент кафедры высшей математики М. В. Лагунова