

Раздел № 1 Линейная алгебра

Тема № 4 Ранг матрицы. Линейные арифметические
пространства

Лекция № 4

Учебные вопросы:

1. Введение.
2. Понятие ранга матрицы.
3. Элементарные преобразования матрицы.
4. Линейные арифметические пространства строк и столбцов. Линейная зависимость и линейная независимость.

Литература

1. Сборник задач по математике в четырех частях. Под общей редакцией А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича
2. Б.П. Демидович. Краткий курс высшей математики.
3. А.Е. Умнов. Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

1. Введение

На предыдущей лекции мы познакомились с прямоугольными числовыми матрицами. Перейдем теперь к изучению понятия ранга матрицы. Рассмотрим также пространства матриц-строк и матриц-столбцов, введем понятия линейной зависимости и линейной независимости, а также базиса и размерности линейного арифметического пространства.

2. Понятие ранга матрицы.

Определение 1. Пусть есть матрица размера $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

Минором M_k ($k \leq \min(m, n)$) матрицы A называется определитель k -го порядка, составленный из элементов этой матрицы, находящихся на пересечении любых её k строк с любыми k столбцами, взятых в соответствующем порядке.

Пример 1: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, миноры первого порядка – это сами элементы матрицы,

минором второго порядка является, например, определитель $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5$. Нетрудно подсчитать, что данная матрица имеет всего 12 миноров первого порядка, 18 миноров второго порядка и 3 минора порядка 3.

Определение 2. Базисным минором матрицы A размера $m \times n$ называется любой её минор порядка r ($r \leq \min(m, n)$), если он отличен от нуля, а все миноры порядка $(r + 1)$ либо равны нулю, либо не существуют.

Определение 3. Порядок r базисного минора называется рангом матрицы A , а её строки и столбцы, входящие в базисный минор, называются базисными.

Ранг матрицы обозначается $\text{rang } A$, $\text{rank } A$ или $r(A)$.

Легко заметить, что матрица любого размера, все элементы которой равны нулю, имеет ранг, равный 0. В остальных случаях ранг матрицы – натуральное число.

Теорема 1. Если в матрице A все миноры порядка k равны нулю и можно составить миноры порядка $k + 1$, то они также будут равны нулю.

Эту теорему легко доказать, используя разложение определителя по строке или столбцу. Таким образом ранг матрицы – это наибольший порядок ее миноров, отличных от нуля.

Рассмотрим матрицы, ранг которых очевиден. К таким матрицам относятся:

- диагональная матрица $D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$, $d_{ii} \neq 0 \forall i = 1, \dots, n$; $\text{rank } D = n$;

- трапецевидная матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, a_{ii} \neq 0 \forall i = 1, \dots, r; \text{rank } A = r;$

- ступенчатая матрица, определяемая следующим образом:

матрица называется ступенчатой, если для неё выполняются следующие условия:

- если какая-либо строка данной матрицы состоит из нулей, то и все последующие строки также состоят из нулей;
- если a_{ik} — первый ненулевой элемент i -той строки, а $a_{i+1,m}$ — первый ненулевой элемент $(i+1)$ -ой строки, то $m > k$.

Примером ступенчатой матрицы может быть матрица

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ легко увидеть, что } \text{rank } B = 3, \text{ то есть ранг ступенчатой матрицы}$$

равен числу ее ненулевых строк.

Чтобы вычислить ранг матрицы, можно, например, найти ее минор, отличный от нуля и показать, что все миноры, порядок которых на единицу больше (если таковые можно составить), равны нулю. Однако, это довольно трудоемкая процедура. Для нахождения ранга матрицы нам понадобятся элементарные преобразования со строками или столбцами.

3. Элементарные преобразования матрицы.

Определение 4. Элементарными преобразованиями со строками матрицы являются:

- изменение порядка следования строк;
- умножение какой-либо строки на число, отличное от нуля;
- сложение строк матрицы.

Аналогичные преобразования возможны также со столбцами матрицы.

Если матрица B получается из матрицы A с помощью элементарных преобразований, то пишут: $A \rightarrow B$. Заметим, что если $A \rightarrow B$, то можно обратно получить матрицу A из матрицы B , используя аналогичные преобразования.

Определение 5. Матрицы, получающиеся друг из друга с помощью элементарных преобразований над строками или столбцами, называются эквивалентными и обозначаются $A \sim B$.

Теорема 2. (О сохранении ранга матрицы при элементарных преобразованиях)

Если $A \sim B \Rightarrow \text{rank } A = \text{rank } B$

Замечание. Обратная теорема неверна, то есть из равенства рангов нельзя сделать вывод об

эквивалентности матриц. Очевидно, что эквивалентные матрицы имеют одинаковые размеры, а одинаковый ранг могут иметь матрицы разных размеров.

При вычислении ранга матриц обычно с помощью элементарных преобразований получают эквивалентную матрицу, ранг которой очевиден, и делают вывод о ранге исходной матрицы.

4. Линейные арифметические пространства строк и столбцов.

Часто понятие ранга матрицы вводится другим способом. Для этого нам понадобятся множества матриц-строк или матриц-столбцов.

Определение 6. Множество матриц-строк размера $1 \times n$, называется линейным (или векторным) арифметическим пространством $\mathbb{R}^n$.

Его элементы – строки $X = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)$ – называют арифметическими векторами. Вспомним, что матрицы одинаковых размеров можно складывать и умножать на число, при этом выполняются все свойства линейного пространства. Аналогично можно ввести линейное пространство столбцов, обозначаемое $\mathbb{R}_n$, его элементы – арифметические векторы-столбцы.

Определение 7. Система векторов $X_1, X_2, \dots, X_k \in \mathbb{R}^n$ называется линейно зависимой, если существует такой набор чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$: $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_k^2 > 0$ (то есть не все числа одновременно равны нулю), при которых выполняется равенство:

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_k X_k = O, \quad (1)$$

здесь $O = (0, 0, \dots, 0)$ – нулевой элемент линейного пространства $\mathbb{R}^n$.

Определение 8. Если равенство (1) выполняется только в том случае, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$, то система векторов называется линейно независимой.

Определение 9. Сумма $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_k X_k$ называется линейной комбинацией векторов $X_1, X_2, \dots, X_k$.

Свойства линейно зависимых и линейно независимых систем векторов

1. Если система векторов содержит нулевой вектор, то она линейно зависима.
2. Любая подсистема векторов линейно независимой системы векторов линейного пространства также линейно независима.
3. Любая система векторов линейного пространства, содержащая линейно зависимую подсистему векторов, линейно зависима.
4. Система векторов линейного пространства линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов этой системы линейно выражается через остальные векторы системы (представлен в виде линейной комбинации остальных векторов системы).

Замечание.

С линейно зависимыми и линейно независимыми системами линейного пространства мы встретимся еще не один раз, в том числе и в продолжении курса линейной алгебры в следующем семестре. В данный момент нас интересует связь с рангом матрицы. Строки матрицы можно

рассматривать как элементы арифметического векторного пространства.

Определение 10. Ранг матрицы – это число, равное наибольшему числу ее линейно независимых строк.

Замечания.

- Последнее определение означает, что если есть матрица $A_{m \times n}$, у которой $\text{rank } A = r$, то в этой матрице можно найти r линейно независимых строк, остальные $m - r$ строк являются их линейными комбинациями. Эти сведения нам понадобятся далее при изучении систем линейных уравнений.
- Аналогично можно определить ранг матрицы как наибольшее число ее линейно независимых столбцов. Иногда вводят отдельные определения для строчного и столбцового ранга, после чего доказывается, что эти числа равны.

Разработал доцент кафедры высшей математики М. В. Лагунова