ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Раздел № 1 Л и н е й н а я а л г е б р а

Тема № 5 Системы линейных уравнений: общие сведения, решение систем крамеровского типа

Лекция № 5

Учебные вопросы:

1. Введение.
2. Общие сведения о системах линейных уравнений.
3. Матричная запись системы уравнений.
4. Крамеровские системы линейных уравнений.

Литература

1. Сборник задач по математике в четырех частях. Под общей редакцией А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича
2. Б.П. Демидович. Краткий курс высшей математики.
3. А.Е. Умнов. Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

1. Введение

На предыдущей лекции мы познакомились с понятием ранга матрицы. Это понятие понадобится при решении произвольных линейных систем уравнений, к изучению которых мы и переходим.

2. Общие сведения о системах линейных уравнений.

<u>Определение 1.</u> Система уравнений вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1}$$

где $a_{ij}, b_i, x_j \in \mathbb{R}$, $(i = 1, 2, \dots, m; j = 1,2, \dots, n)$, при этом числа a_{ij} называются коэффициентами системы (1), числа b_i — свободными членами системы. x_j — неизвестные системы (1).

<u>Определение 2.</u> Решением системы называется набор чисел $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0 \in \mathbb{R}$, при подстановке которых в уравнения системы вместо соответствующих неизвестных обращают уравнения системы (1) в верные равенства.

<u>Определение 3.</u>

- Если система имеет решение, то она называется совместной. В противном случае система называется несовместной.
- Если система имеет единственное решение, то она называется совместной определенной. Если решений больше одного, то система является совместной неопределенной.

<u>Определение 4.</u> Две линейные системы называются равносильными, если они обе несовместны, или же они обе совместны и каждое решение одной системы является решением другой и наоборот.

3. Матричная запись системы линейных уравнений.

Введем в рассмотрение следующие матрицы:

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ — матрица системы, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ — столбец свободных членов, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ — столбец неизвестных. Заметим, что $AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$, а тогда систему (1) можно записать в матричной форме:

$$AX = B. \tag{2}$$

Наряду с такой формой записи линейной системы существует еще одна форма записи – расширенная матрица системы (1):

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

к этой форме записи мы скоро вернемся, а пока изучим матричное уравнение (2).

4. Крамеровские системы уравнений.

Определение 5. Линейная система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

называется крамеровской или системой крамеровского типа, если определитель системы $\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$

То есть это система из n уравнений с n неизвестными, матрица которой невырожденная, соответственно, $\operatorname{rank} A = n$.

Если матрица A невырожденная (квадратная матрица с ненулевым определителем), то она имеет единственную обратную матрицу A^{-1}, а тогда мы сможем решить матричное уравнение, домножив левую и правую части равенства (2) слева (что важно!) на A^{-1}, получим единственное решение матричного уравнения и, как следствие, единственное решение системы (1):

$$X = A^{-1}B. \tag{3}$$

Теорема Крамера. Если система крамеровского типа, то она имеет единственное решение, определяемое равенствами:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, i = 1, 2, \dots, n, \text{ где } \Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Замечание. Определитель Δ_i – это определитель матрицы системы, в которой заменен i-ый столбец на столбец свободных членов. Формулы для нахождения решения называют правилом Крамера.

Доказательство теоремы Крамера.

В соответствии с (3) нам достаточно найти обратную матрицу и умножить на нее слева столбец свободных членов. При доказательстве потребуется теорема о разложении определителя по столбцу и следствие из этой теоремы.