ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский
политехнический университет
Петра Великого

Раздел № 1 Линейная алгебра

Тема № 6 Линейные системы общего вида

Лекция № 6

Учебные вопросы:

1. Введение.
2. Линейные системы общего вида.
3. Метод Гаусса.
4. Критерий совместности Кронекера-Капелли.

Литература

1. Сборник задач по математике в четырех частях. Под общей редакцией А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича
2. Б.П. Демидович. Краткий курс высшей математики.
3. А.Е. Умнов. Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

1. Введение

На предыдущей лекции мы ввели основные понятия о системах линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), а также познакомились с системами крамеровского типа, в которых число неизвестных равно числу уравнений, а определитель матрицы системы отличен от нуля. В этом случае система имеет единственное решение, которое можно найти методом обратной матрицы или, что почти то же самое, по правилу Крамера. Перейдем теперь к системам, которые не относятся к описанному классу.

2. Линейные системы общего вида.

Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1}$$

Если $m \neq n$ или если $m = n$, но определитель квадратной матрицы системы $\det A = 0$, то система не является крамеровской. Такие системы называют системами общего вида. Заметим, что матрица этой системы не имеет обратной, поэтому решить матричное уравнение $AX = B$ с помощью обратной матрицы не получится. Для решения таких систем обычно используют метод Гаусса. Прежде чем говорить о методе Гаусса, рассмотрим элементарные преобразования системы (1).

Элементарные преобразования системы линейных уравнений

К элементарным преобразованиям с системой линейных уравнений относятся следующие преобразования:

- перестановка местами уравнений системы,
- умножение какого-нибудь уравнения системы на число $k \neq 0$,
- сложение уравнений системы.

Заметим, что при элементарных преобразованиях система перейдет в эквивалентную ей. Элементарным преобразованиям системы соответствуют аналогичные элементарные преобразования **со строками** расширенной матрицы.

Как мы знаем, при элементарных преобразованиях со строками ранг матрицы не изменяется. Система переходит в эквивалентную систему, а соответствующая расширенная матрица – в эквивалентную расширенную матрицу.

3. Метод Гаусса

Метод Гаусса заключается в том, что исходную линейную систему с помощью элементарных преобразований приводим к системе, расширенная матрица которой имеет ступенчатую форму. Такие преобразования называют прямым ходом метода Гаусса. Далее решаем полученную эквивалентную систему. В этом случае мы последовательно находим все неизвестные, начиная с последнего уравнения системы и заканчивая определением последней неизвестной переменной. Этот процесс называется обратным ходом метода Гаусса. В процессе вычислений может получиться уравнение, заведомо не имеющее решение. В этом случае система является несовместной.

При решении системы методом Гаусса, разумеется, удобно использовать расширенную матрицу. Иногда бывает полезно переставить столбцы расширенной матрицы, что эквивалентно изменению порядка следования неизвестных. В результате таких операций получим матрицу вида:

$$\bar{A} \sim \overline{A_1} = \left(\begin{array}{ccccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1r}^{(1)} & a_{1,r+1}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2r}^{(1)} & a_{2,r+1}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & a_{rr}^{(1)} & a_{r,r+1}^{(1)} & \cdots & a_{rn}^{(1)} & b_r^{(1)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{r+1}^{(1)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right),$$

при этом последних нулевых строк может не быть. Напомним, что $a_{ii}^{(1)} \neq 0$ при $i = 1, 2, \dots, r$.

Возможны следующие случаи:

1. $r < m, b_{r+1}^{(1)} \neq 0$.

В этом случае система, соответствующая данной расширенной матрице, имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + \ldots + a_{1r}^{(1)} x_r + a_{1,r+1}^{(1)} x_{r+1} + \ldots + a_{1n}^{(1)} x_n = b_1^{(1)}, \\ \qquad a_{22}^{(1)} x_2 + \ldots + a_{2r}^{(1)} x_r + a_{2,r+1}^{(1)} x_{r+1} + \ldots + a_{2n}^{(1)} x_n = b_2^{(1)}, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \qquad\qquad a_{rr}^{(1)} x_r + a_{r,r+1}^{(1)} x_{r+1} + \ldots + a_{rn}^{(1)} x_n = b_r^{(1)}, \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \quad . \quad . \quad . + 0 \cdot x_n = b_{r+1}^{(1)}, \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \quad . \quad . \quad . + 0 \cdot x_n = 0, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \quad . \quad . \quad . + 0 \cdot x_n = 0, \end{cases}$$

при этом $(r+1)$-е уравнение не имеет решений, а тогда и вся система является несовместной.

2. $r < m, b_{r+1}^{(1)} = 0$ или $r = m$.

В этом случае мы можем отбросить лишние уравнения, отвечающие очевидным тождествам $0 = 0$, и получим систему вида:

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + \ldots + a_{1r}^{(1)} x_r + a_{1,r+1}^{(1)} x_{r+1} + \ldots + a_{1n}^{(1)} x_n = b_1^{(1)}, \\ \qquad a_{22}^{(1)} x_2 + \ldots + a_{2r}^{(1)} x_r + a_{2,r+1}^{(1)} x_{r+1} + \ldots + a_{2n}^{(1)} x_n = b_2^{(1)}, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \qquad\qquad a_{rr}^{(1)} x_r + a_{r,r+1}^{(1)} x_{r+1} + \ldots + a_{rn}^{(1)} x_n = b_r^{(1)}. \end{cases} \tag{1}$$

Если при этом $r = n$, то система (1) примет вид (2):

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)}, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)}. \end{cases} \tag{2}$$

Система (2) является крамеровской и имеет единственное решение.

Если $r < n$, то соответствующая система примет вид:

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{1r}^{(1)}x_r + a_{1,r+1}^{(1)}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)}, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2r}^{(1)}x_r + a_{2,r+1}^{(1)}x_{r+1} + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \qquad\qquad a_{rr}^{(1)}x_r + a_{r,r+1}^{(1)}x_{r+1} + \ldots + a_{rn}^{(1)}x_n = b_r^{(1)}. \end{cases}$$

С такой системой поступим следующим образом:

- перенесем переменные $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ в правые части, получим систему:

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{1r}^{(1)}x_r = b_1^{(1)} - a_{1,r+1}^{(1)}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}^{(1)}x_n, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2r}^{(1)}x_r = b_2^{(1)} - a_{2,r+1}^{(1)}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}^{(1)}x_n, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \qquad\qquad a_{rr}^{(1)}x_r = b_r^{(1)} - a_{r,r+1}^{(1)}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}^{(1)}x_n. \end{cases}$$

- Переменные $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ назовем свободными переменными и придадим им произвольные значения: $x_{r+1} = C_1, x_{r+2} = C_2, \ldots, x_n = C_{n-r}$.
- Переменные $x_1, x_2, \ldots, x_r$ назовем базисными.
- Полученная система является крамеровской, решить ее можно с помощью правила Крамера, но проще провести так называемый обратный ход метода Гаусса и поочередно, следуя от последнего уравнения к предыдущим, выразить все базисные переменные через свободные. В этом случае получим бесконечное множество решений.

Важное замечание. Метод Гаусса прекрасно подходит и для решения систем крамеровского типа.

4. Критерий совместности Кронекера-Капелли.

Заметим, что число решений системы связано с рангом основной и расширенной матриц системы. Справедлива следующая теорема.

Теорема Кронекера-Капелли. Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг её основной матрицы равен рангу её расширенной матрицы, причём система имеет единственное решение, если ранг равен числу неизвестных, и бесконечное множество решений, если ранг меньше числа неизвестных.

В символической записи:

- $\operatorname{rank} A \neq \operatorname{rank} \bar{A} \Leftrightarrow$ система несовместна;
- $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \bar{A} = r = n \Leftrightarrow$ система совместная и определенная;

- $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \bar{A} = r < n \Leftrightarrow$ система совместная и неопределенная.

Замечания.

1) Для доказательства необходимого условия совместности используется теорема о сохранении ранга при преобразованиях со столбцами.
2) Достаточность может быть проиллюстрирована, например, методом Гаусса.
3) Свободные и базисные переменные могут быть выбраны не единственным способом. Базисные переменные должны находиться в системе с теми коэффициентами, которые вошли в базисный минор, а базисных миноров, как мы знаем, может быть много.
4) Есть еще один метод решения системы общего вида, называемый методом Кронекера-Капелли. Если ранги основной и расширенной матрицы совпали, то находим базисный минор основной матрицы системы, а как мы знаем, остальные строки (уравнения системы) будут линейными комбинациями выбранных строк (уравнений), то есть они не дадут дополнительной информации о множестве решений системы. Оставляем в системе только уравнения, коэффициенты которых вошли в базисный минор. Аналогично, как в методе Гаусса, назначаем базисные и свободные переменные и далее решаем систему крамеровского типа, выражая базисные переменные через свободные.

Разработал доцент кафедры высшей математики М. В. Лагунова