

Раздел № 1 Линейная алгебра

Тема № 7 Однородные линейные системы.

Собственные числа и собственные векторы
квадратной матрицы

Лекция № 7

Учебные вопросы:

1. Введение.
2. Линейные однородные системы (ЛОС).
3. Структура общего решения ЛОС.
4. Существование ненулевого решения у квадратной ЛОС.
5. Собственные числа и собственные векторы квадратной матрицы

Литература

1. Сборник задач по математике в четырех частях. Под общей редакцией А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича
2. Б.П. Демидович. Краткий курс высшей математики.
3. А.Е. Умнов. Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \dots + a_{1r}^{(1)}x_r + a_{1,r+1}^{(1)}x_{r+1} + \dots + a_{1n}^{(1)}x_n = 0, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2r}^{(1)}x_r + a_{2,r+1}^{(1)}x_{r+1} + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = 0, \\ \dots \\ a_{rr}^{(1)}x_r + a_{r,r+1}^{(1)}x_{r+1} + \dots + a_{rn}^{(1)}x_n = 0, \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = 0, \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = 0, \\ \dots \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = 0, \end{cases}$$

За базисные переменные выберем $x_1, x_2, \dots, x_r$, остальные переменные $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ (если они останутся) назовем свободными и придадим им произвольные значения: $x_{r+1} = C_1, x_{r+2} = C_2, \dots, x_n = C_{n-r}$. Перенесем эти значения в правые части равенств и выразим базисные переменные через свободные, используя обратный ход метода Гаусса. Так, например,

$$x_r = \frac{1}{a_{rr}^{(1)}} \left(-a_{r,r+1}^{(1)}C_1 - a_{r,r+2}^{(1)}C_2 - \dots - a_{rn}^{(1)}C_{n-r} \right).$$

Далее, последовательно подставляя уже найденные выражения для базисных переменных через свободные в предыдущие уравнения, выразим все остальные неизвестные. В результате после обратного хода метода Гаусса у нас получится следующее:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11}C_1 + \dots + \alpha_{1,n-r}C_{n-r}, \\ x_2 = \alpha_{21}C_1 + \dots + \alpha_{2,n-r}C_{n-r}, \\ \dots \\ x_r = \alpha_{r1}C_1 + \dots + \alpha_{r,n-r}C_{n-r} \\ x_{r+1} = C_1 \in \mathbb{R}, \\ \dots \\ x_n = C_{n-r} \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Из полученной системы легко увидеть, что столбец неизвестных общего решения ЛОС (1) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} \alpha_{11}C_1 + \dots + \alpha_{1,n-r}C_{n-r} \\ \alpha_{21}C_1 + \dots + \alpha_{2,n-r}C_{n-r} \\ \vdots \\ \alpha_{r1}C_1 + \dots + \alpha_{r,n-r}C_{n-r} \\ C_1 \\ \vdots \\ C_{n-r} \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + C_{n-r} \begin{pmatrix} \alpha_{1,n-r} \\ \alpha_{2,n-r} \\ \vdots \\ \alpha_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= C_1 X_1 + C_2 X_2 + \dots + C_{n-r} X_{n-r}. \end{aligned}$$

Определение. Система векторов-столбцов $X_1, X_2, \dots, X_{n-r}$, с помощью которых мы записали общее решение системы (1), называется фундаментальной системой решений (ФСР) линейной однородной системы (1).

Замечания.

- 1) ФСР определяется не единственным образом – все зависит от того, какой базисный минор мы выберем.
- 2) Векторы-столбцы, входящие в ФСР, линейно независимы.
- 3) Если рассмотреть неоднородную систему с той же самой матрицей, что и в соответствующей

однородной системе, то можно показать, что общее решение будет выражаться как сумма некоторого частного решения неоднородной системы и общего решения соответствующей однородной системы. В случае, конечно, когда неоднородная система совместна.

4. Существование ненулевого решения квадратной однородной системы.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда число уравнений однородной системы и число неизвестных совпадает.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases} \quad (2)$$

В этом случае справедлива следующая теорема.

Теорема. Чтобы система (2) имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель матрицы системы равен нулю.

Доказательство.

Необходимость

Заметим, что матрица системы квадратная, и у нее существует определитель. Докажем, что этот определитель должен быть равен нулю, от противного. Пусть это не так. Тогда система (2) крамеровского типа, а значит имеет единственное решение. Им может быть только нулевое решение. Что противоречит условию теоремы.

Достаточность

Если определитель матрицы системы A равен нулю, то $\text{rank } A = r < n$, и мы имеем $n - r \geq 1$ свободных переменных, которые могут принимать любые, в том числе и отличные от нуля значения.

5. Собственные числа и собственные векторы квадратной матрицы.

Перейдем теперь к очень важному в последующих курсах математики понятию собственных чисел и собственных векторов.

Определение 1. Ненулевой вектор-столбец X называется собственным вектором квадратной матрицы A , если существует такое число $\lambda \in \mathbb{R}$, такое что $AX = \lambda X$. Это число λ называется собственным числом матрицы A , а вектор X — соответствующий ему собственный вектор.

Замечание. Последнее равенство буквально означает, что результат умножения на матрицу можно заменить умножением на скаляр.

Выведем условие, при котором число λ является собственным, и укажем способ для нахождения соответствующих собственных векторов.

Рассмотрим эквивалентные матричные уравнения:

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow AX = \lambda EX \Leftrightarrow AX - \lambda EX = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda E)X = 0.$$

Здесь E — единичная матрица, O — нулевой столбец. Последнее равенство в этой цепочке суть ЛОС, матрица которой $A - \lambda E$. Эта матрица квадратная, и поскольку нас интересуют ненулевые решения ЛОС, то они существуют в том и только в том случае, когда эта матрица имеет нулевой определитель.

Определение 2. Уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ называется характеристическим уравнением для матрицы A .

- Чтобы найти собственные числа матрицы A следует решить характеристическое уравнение. Это уравнение является алгебраическим уравнением степени n , где n — порядок матрицы A .
- Для нахождения собственных векторов, отвечающих найденным собственным числам, необходимо решить ЛОС с нулевым определителем $\det(A - \lambda E)$ и выбрать ненулевые решения этой системы.

Разработал доцент кафедры высшей математики М. В. Лагунова