

**Раздел № 2** Векторная алгебра

**Тема № 1** Линейное пространство геометрических  
векторов

**Лекция № 8**

### Учебные вопросы:

1. Введение.
2. Понятие геометрического вектора. Линейные операции с векторами.
3. Коллинеарность и компланарность системы векторов.
4. Линейная зависимость и линейная независимость.
5. Базис и размерность пространства геометрических векторов.

### Литература

1. Сборник задач по математике в четырех частях. Под общей редакцией А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича
2. Б.П. Демидович. Краткий курс высшей математики.
3. А.Е. Умнов. Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

## 1. Введение

Предметом изучения в векторной алгебре являются векторные величины (векторы) и действия с ними. Примерами таких величин могут служить скорость и ускорение движущейся точки, сила и т.п. Они характеризуются не только своими численными значениями, но и направленностью. Начальные сведения о векторах и некоторых действиях с ними (сложение векторов, умножение вектора на число и скалярное произведение векторов) содержатся в школьном курсе элементарной математики. В данном разделе на основе дальнейшего развития и углубления этих сведений вводятся новые понятия линейной зависимости и линейной независимости векторов, базиса на некоторых множествах векторов, а также рассматриваются новые действия с векторами – векторное и смешанное произведения. Изучение свойств операций с векторами приводит к алгебраизации геометрических высказываний, т.е. к замене геометрических утверждений некоторыми векторными равенствами. Введение понятия координат вектора заменяет действия с векторами действиями с числами. Построенная таким образом теория, называемая «векторная алгебра», служит математическим аппаратом для построения аналитической геометрии и других разделов математики, а также имеет многочисленные приложения в физике, теоретической механике и различных технических дисциплинах.

## 2. Понятие геометрического вектора. Линейные операции с векторами.

**Определение 1.** *Геометрическим вектором* называется направленный прямолинейный отрезок, для которого указано, какая из ограничивающих его точек считается началом, а какая концом. Начало вектора называют также точкой его приложения.

Если точки  $A$  и  $B$  – начало и конец данного вектора, то сам вектор обозначается символом  $\overrightarrow{AB}$  или  $\vec{a}$  (Рис. 1). Пусть выбрана какая-либо система измерения длин прямолинейных отрезков, иначе говоря, масштаб. Длиной вектора, или его модулем, называется длина отрезка, образующего вектор. Обозначение:  $|\overrightarrow{AB}|$ ,  $|\vec{a}|$ .

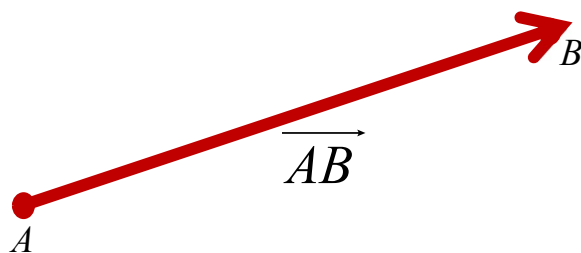


Рис. 1. Изображение вектора  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ .

**Определение 2.** Два вектора называются равными, если они лежат на параллельных прямых (или на одной прямой), одинаково направлены и имеют равные длины.

Таким образом, мы пришли к понятию свободного вектора, как класса равных векторов. Не имеет значения точка приложения вектора, каждый вектор определяет его длина и направление.

**Определение 3.** Вектор, у которого начало и конец совпадают, называется нулевым или нуль-вектором. Нулевой вектор не имеет определенного направления, а его модуль равен нулю.

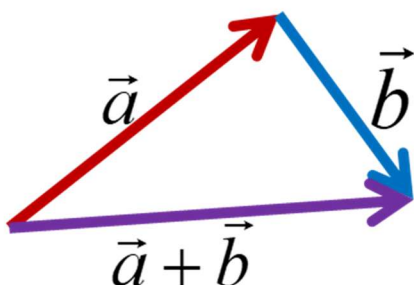
Таким образом, можно считать все нуль-векторы равными и ввести для них единое обозначение:  $\vec{0}$ .

### Линейные операции с векторами

**Определение 4.** Пусть даны два вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . Приложим вектор  $\vec{b}$  к концу вектора  $\vec{a}$ . Тогда вектор, начало которого совпадает с началом вектора  $\vec{a}$ , а конец – с концом вектора  $\vec{b}$ , называется суммой векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  и обозначается  $\vec{a} + \vec{b}$ .

Существуют два правила для нахождения суммы векторов (Рис. 2).

правило треугольника



правило параллелограмма

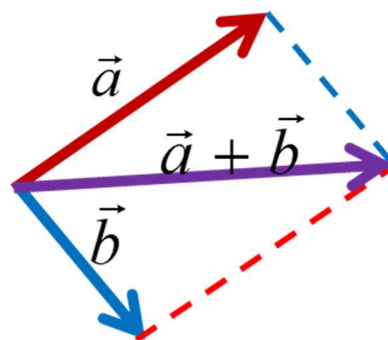


Рис. 2. Правила для нахождения суммы векторов.

**Определение 5.** Произведением вектора  $\vec{a}$  на вещественное число  $\lambda$  называется вектор  $\vec{b}$ , определяемый следующими тремя условиями:

- 1)  $|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$ ;
- 2) вектор  $\vec{b}$  параллелен вектору  $\vec{a}$ ;
- 3)  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  одинаково направлены, если  $\lambda > 0$ , и противоположены, если  $\lambda < 0$ .

### Свойства линейных операций над векторами

1.  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$  – коммутативность суммы
2.  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$  – ассоциативность суммы
3.  $\forall \vec{a} \exists! \vec{0}: \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$  – существование нулевого элемента
4.  $\forall \vec{a} \exists! (-\vec{a}): -\vec{a} + \vec{a} = \vec{0}$  – существование противоположного элемента
5.  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$  – ассоциативность относительно скалярного множителя
6.  $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$  – дистрибутивность умножения вектора на сумму вещественных чисел
7.  $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$  – дистрибутивность умножения вещественного числа на сумму

## векторов

### 8. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ - свойство единицы

**Замечание.** Как мы видим, множество геометрических векторов с введенными на нем линейными операциями – сложением и умножением на скаляр (число) – обладает всеми свойствами линейного пространства.

### 3. Коллинеарность и компланарность.

**Определение 5.** Векторы  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  называются *коллинеарными*, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых.

Для обозначения коллинеарных векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  используется символ параллельности:  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ .

**Определение 6.** Векторы  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  называются *компланарными*, если они расположены на прямых, параллельных одной и той же плоскости.

**Определение 7.** Вектор, коллинеарный данному вектору  $\vec{a}$ , одинаково направленный с ним и имеющий единичную длину, называется *ортом* вектора  $\vec{a}$  и обозначается  $\vec{a}_0$ .

Вспомним некоторые теоремы, доказанные в школьном курсе математики.

**Теорема 1.** Пусть  $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \parallel \vec{a} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}: \vec{b} = k\vec{a}$

#### Доказательство

##### Необходимость

- Если  $\vec{b} = \vec{0}$ , то  $k = 0$ .
- Если  $\vec{b} \neq \vec{0}$ , то орты векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  либо сонаправлены, либо противоположны, то есть возможны два варианта:

$$\vec{a}_0 \uparrow \vec{b}_0 \Leftrightarrow \vec{b}_0 = \vec{a}_0 \Leftrightarrow \frac{1}{|\vec{b}|} \vec{b} = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} \Rightarrow \vec{b} = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \vec{a} \Rightarrow k = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|};$$

$$\vec{a}_0 \downarrow \vec{b}_0 \Leftrightarrow \vec{b}_0 = -\vec{a}_0 \Leftrightarrow \frac{1}{|\vec{b}|} \vec{b} = -\frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} \Rightarrow \vec{b} = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \vec{a} \Rightarrow k = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}.$$

##### Достаточность

Если  $\vec{b} = k\vec{a}$ , то коллинеарность следует из определения произведения вектора на число.

**Теорема 2.** Пусть  $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ . Векторы  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  компланарны  $\Leftrightarrow \exists k, l \in \mathbb{R}: \vec{c} = k\vec{a} + l\vec{b}$ .

#### Доказательство

##### Необходимость

- Если  $\vec{c} = \vec{0}$ , то  $k = 0, l = 0$ .
- Если  $\vec{c} \neq \vec{0}$ , то отложим его из той же точки, что и векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  (Рис. 3).

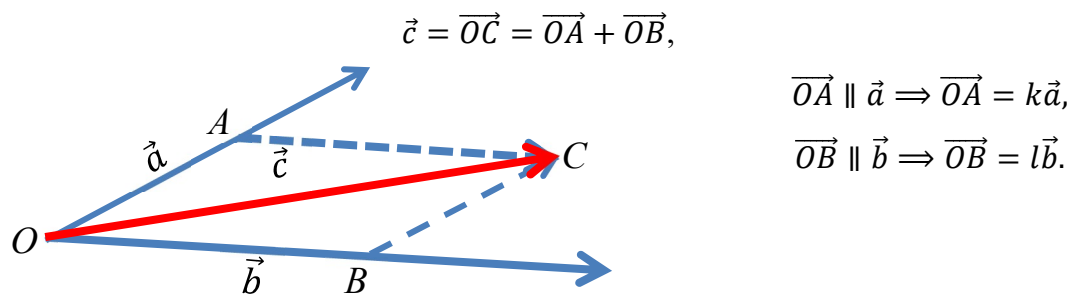


Рис. 3. Иллюстрация к доказательству теоремы 2.

#### Достаточность

Если  $\vec{c} = k\vec{a} + l\vec{b}$ , то компланарность следует из смысла проделанных операций.

#### 4. **Линейная зависимость и линейная независимость.**

Пусть даны векторы  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ . Линейные операции над векторами позволяют определить так называемую линейную комбинацию векторов.

**Определение 8.** Линейной комбинацией векторов  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  называется вектор  $\vec{a}$ , равный сумме произведений данных векторов на произвольные вещественные числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

Таким образом, линейная комбинация векторов  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  имеет вид:

$$\lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n,$$

где  $\lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$ . Очевидно, линейная комбинация векторов также является вектором.

**Определение 9.** Линейная комбинация векторов  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  называется *нетривиальной*, если не все числа  $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ , равны нулю, т.е.  $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2 > 0$ . Если все  $\lambda_i = 0, i = 1, \dots, n$ , то линейная комбинация называется *тривиальной*.

Заметим, что тривиальная линейная комбинация любых векторов является нуль-вектором. Действительно,  $0 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{e}_n = \vec{0}$ .

**Определение 10.** Векторы  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  называются *линейно зависимыми*, если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нуль-вектору, иначе данные векторы называются *линейно независимыми*.

Для линейно зависимых векторов равенство

$$\lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n = \vec{0}$$

выполняется при некоторых  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , удовлетворяющих условию:

$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2 > 0$ , а для линейно независимых векторов это равенство справедливо только при  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ .

#### 5.

#### **Свойства линейно зависимых векторов.**

- Если хотя бы один из векторов  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  нулевой, то эти векторы линейно зависимы.
- Если какие-то  $k$  векторов в системе из  $n$  векторов  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  линейно зависимы, где  $2 \leq k < n$ , то и все векторы  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  линейно зависимы.
- Векторы  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов является линейной комбинацией всех остальных.
- Система, содержащая нулевой вектор всегда линейно зависима.

### Геометрический смысл линейной зависимости векторов

Один вектор линейно зависим тогда и только тогда, когда он нулевой. Действительно, равенство  $\lambda \vec{a} = \vec{0}$  при  $\lambda \neq 0$  справедливо только при  $\vec{a} = \vec{0}$ .

Опираясь на доказанные выше теоремы 1 и 2, можно установить связь между коллинеарностью, компланарностью и линейной зависимостью.

**Теорема 3.** Два вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны тогда и только тогда, когда они линейно зависимы.

**Теорема 4.** Три вектора  $\vec{a}, \vec{b}$  и  $\vec{c}$  компланарны тогда и только тогда, когда они линейно зависимы.

**Определение 11.** Система векторов  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k$  называется **базисом** векторного пространства  $V$ , если

- 1) она линейно независима;
- 2) любой другой вектор  $\vec{a} \in V$  можно представить в виде:

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_k \vec{e}_k.$$

Последнее равенство называется разложением вектора  $\vec{a}$  по базису  $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k\}$ , сами числа  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  называются координатами вектора  $\vec{a}$  по базису  $\mathcal{B}$ .

**Теорема 5.** Координаты в базисе определяются единственным образом.

Доказательство проводится от противного.

Пусть есть два разложения по базису:

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_k \vec{e}_k, \quad \vec{a} = \beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \dots + \beta_k \vec{e}_k, \text{ тогда}$$

$$(\alpha_1 - \beta_1) \vec{e}_1 + \dots + (\alpha_k - \beta_k) \vec{e}_k = \vec{0} \xrightarrow{\text{лин. независ.}} \begin{cases} \alpha_1 = \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_k = \beta_k \end{cases}$$

**Замечание.** Базис пространства существует не единственный – число базисов, вообще говоря, бесконечно, но важно то, что число элементов базиса всегда одинаково.

**Определение 12.** Число векторов в базисе называется размерностью пространства.

## Примеры базисов

### Пример 1

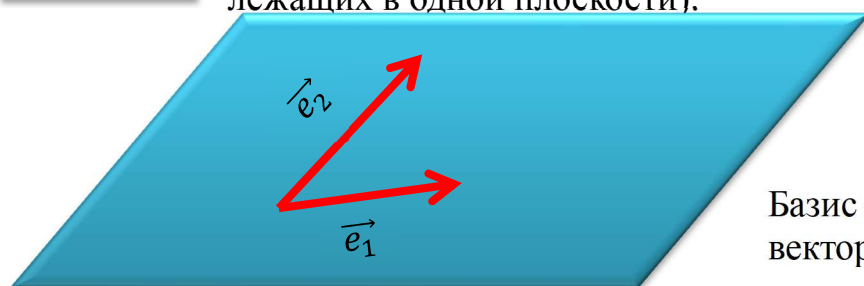
$V_1$  – множество коллинеарных векторов (множество векторов, лежащих на одной прямой).



Базис – любой ненулевой вектор, лежащий на этой прямой.

### Пример 2

$V_2$  – множество компланарных векторов (множество векторов, лежащих в одной плоскости).



Базис – любые два неколлинеарных вектора, лежащих в этой плоскости.

**Теорема 6.** Любые три некопланарных вектора образуют базис пространства.

#### Доказательство.

Мы уже знаем, что 3 некопланарных вектора линейно независимы. Покажем, что любой вектор пространства можно разложить по трем некопланарным векторам. Отложим все три вектора из общего начала и возьмем произвольный вектор  $\vec{d} = \overrightarrow{OD}$  пространства с началом в той же точке  $O$ .

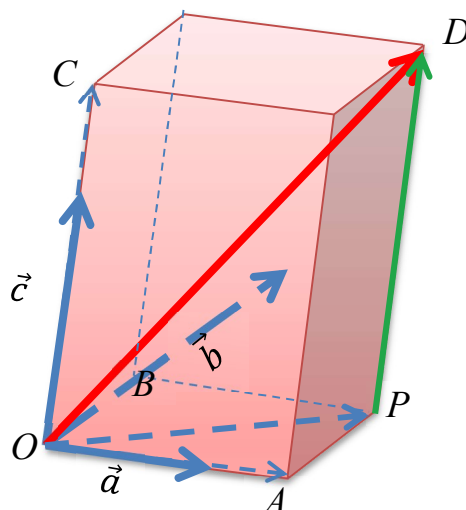
$$\vec{d} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PD}, \overrightarrow{PD} \text{ компланарен } \vec{a} \text{ и } \vec{b}, \text{ значит } \overrightarrow{PD} = k\vec{a} + l\vec{b}.$$

$\overrightarrow{PD}$  коллинеарен  $\vec{c}$ , значит  $\overrightarrow{PD} = m\vec{c} \Rightarrow \vec{d} = k\vec{a} + l\vec{b} + m\vec{c}$ , таким образом, мы разложили произвольный вектор пространства по трем некопланарным (линейно независимым) векторам, то есть тройка некопланарных векторов является базисом пространства. Что и требовалось доказать.

**Определение 12.** Базис  $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k\}$  называется нормированным, если  $|\vec{e}_i| = 1$  при  $\forall i = 1, 2, \dots, k$ .

**Определение 13.** Базис  $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k\}$  называется ортогональным, если  $\vec{e}_i \perp \vec{e}_j$  при  $\forall i, j: i \neq j$ , то есть все векторы взаимно перпендикулярны (ортогональны).

**Определение 14.** Ортогональный нормированный базис называется ортонормированным.



Разработал доцент кафедры высшей математики М. В. Лагунова