

Раздел № 2 Векторная алгебра

Тема № 2 Декартовы координаты. Линейные операции с векторами, заданными декартовыми координатами

Лекция № 9

Учебные вопросы:

1. Введение.
2. Прямоугольная декартова система координат.
3. Проекция вектора на ось.
4. Длина и направление вектора, заданного координатами.
5. Линейные операции с векторами, заданными координатами.

Литература

1. Сборник задач по математике в четырех частях. Под общей редакцией А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича
2. Б.П. Демидович. Краткий курс высшей математики.
3. А.Е. Умнов. Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

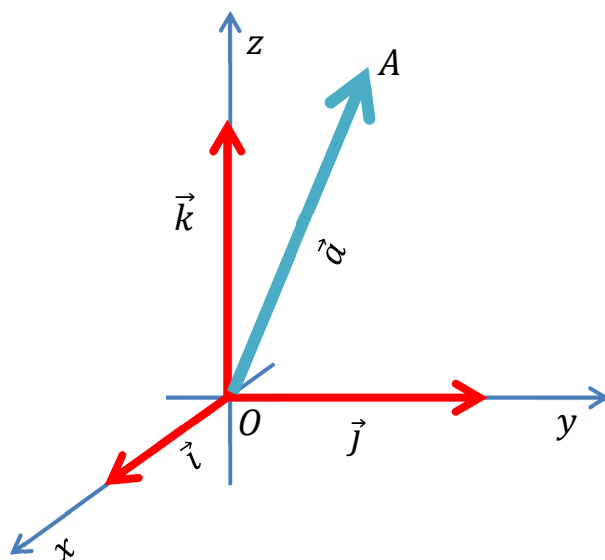
3. Введение

На предыдущей лекции мы ввели понятие базиса на прямой, на плоскости и в пространстве. На основе понятия ортонормированного базиса вводится прямоугольная декартова система координат, названная именем великого французского ученого Рене Декарта (1596 – 1650). С помощью декартовой системы координат можно решать различные задачи геометрии и физики, о которых будет сказано на этой и следующих лекциях по векторной алгебре. В дальнейшем декартова система координат служит основой для построения аналитической геометрии.

2. Прямоугольная декартова система координат.

Рассмотрим трехмерное пространство векторов. Можно будет сделать то же самое для случая плоскости или прямой. В пространства, размерность которых больше трех, у нас, к сожалению, не получится заглянуть, но можно продолжить те же построения и на большую размерность. Правда, уже без картинок.

Прямоугольная декартова система координат может быть построена следующим образом (Рис.



1).

Рис. 1. Декартова система координат.

Точка O — начало координат. Это может быть любая точка в пространстве.

$\mathfrak{B} = \langle \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rangle$ — ортонормированный базис. Скобки такого вида мы будем использовать в том случае, когда важен порядок следования векторов в базисе.

Ось Ox , направление которой определяет орт $\vec{i}$, называется осью абсцисс.

Ось Oy , направление которой определяет орт $\vec{j}$, называется осью ординат.

Ось Oz , направление которой определяет орт $\vec{k}$, называется осью аппликат.

Как мы знаем, любой вектор пространства $\vec{a}$ можно разложить по базису $\mathfrak{B} = \langle \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rangle$:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \quad (1)$$

Декартовыми координатами вектора $\vec{a}$ называются координаты в базисе $\mathfrak{B} = \langle \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rangle$.

Вектор, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, начало которого совпадает с началом координат, называется радиус-вектором точки A . Декартовы координаты точки A – координаты ее радиус-вектора.

Поскольку разложение по базису (1) единственно, то каждой точке в пространстве отвечают

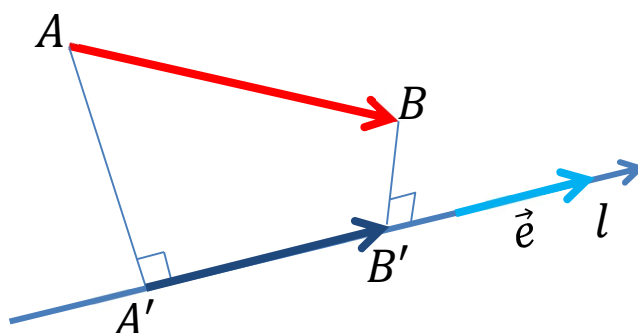
$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) \text{ или } \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}.$$

три декартовых координаты, определяемые также единственным образом. В этом смысле мы можем отождествлять геометрический вектор и вектор арифметического пространства, то есть каждой точке или вектору ставить во взаимно однозначное соответствие упорядоченную тройку координат. В зависимости от ситуации, эти 3 координаты будем записывать в строчку или в столбец и записывать:

3. Проекция вектора на ось.

Определение 1. Векторной проекцией $\overrightarrow{AB}$ на ось l , направление которой определено направлением орта $\vec{e}$, называется вектор $\overrightarrow{A'B'}$, где A' и B' – проекции точек A и B на ось l (Рис. 1).

Рис. 1. Векторная проекция.



Определение 2. Скалярной проекцией (проекцией) вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l называется число, обозначаемое $\text{пр}_l \vec{a} = \pm |A'B'|$, где знак выбирается следующим образом: плюс, если $\overrightarrow{A'B'} \uparrow \vec{e}$, и минус, если $\overrightarrow{A'B'} \downarrow \vec{e}$.

Свойства проекции

- $\text{пр}_l(\vec{a} + \vec{b}) = \text{пр}_l \vec{a} + \text{пр}_l \vec{b}$
- $\text{пр}_l(k\vec{a}) = k \cdot \text{пр}_l \vec{a}$

Теорема 1. (О вычислении проекции)

$\text{пр}_l \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi$, где $\varphi = \widehat{\vec{a}, \vec{e}}$.

Доказательство

Возможны 3 случая, изображенные на рисунке 2. В каждом случае легко проверить, что эта формула выполняется.

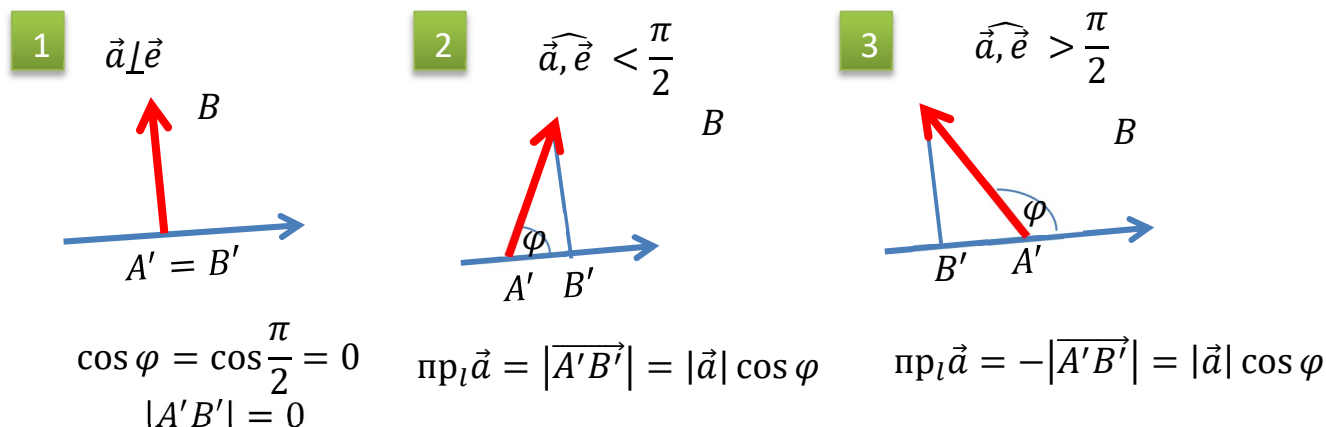


Рис. 2. Три случая для доказательства теоремы о вычислении проекции.

Следствие. Векторная проекция $\overline{A'B'} = (\text{pr}_l \overline{AB}) \vec{e}$.

4. Длина и направление вектора

Каждый геометрический вектор характеризуется длиной и направлением. Зная его декартовы координаты, можно найти его длину и охарактеризовать направление вектора. Прежде всего, докажем теорему о связи декартовых координат, введенных в пункте 2, и проекциями радиус-вектора $\vec{a}$ на координатные оси.

Теорема 2. Координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $\mathfrak{B} = \langle \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rangle$ совпадают с проекциями этого вектора на координатные оси, то есть $a_x = \text{pr}_{\vec{i}} \vec{a}$, $a_y = \text{pr}_{\vec{j}} \vec{a}$, $a_z = \text{pr}_{\vec{k}} \vec{a}$.

Доказательство приведено на (Рис. 3).

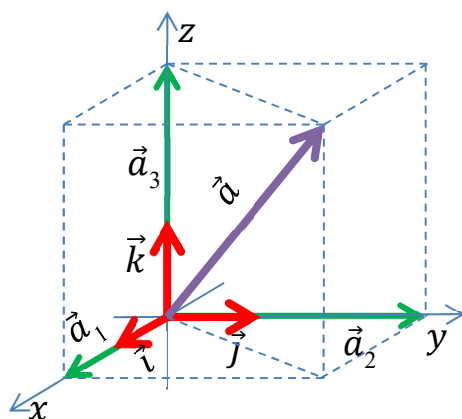
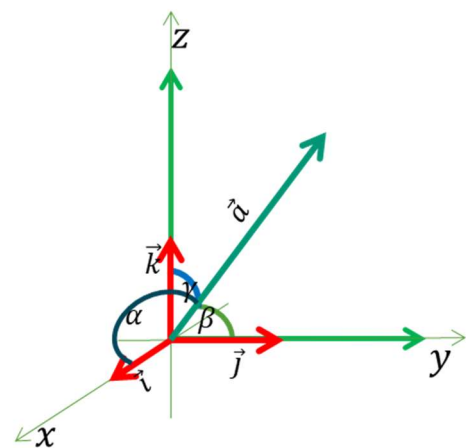


Рис. 3

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 \\ \vec{a}_1 \parallel \vec{i} &\Rightarrow \vec{a}_1 = (\text{pr}_{ox} \vec{a}) \vec{i}, \\ \vec{a}_2 \parallel \vec{j} &\Rightarrow \vec{a}_2 = (\text{pr}_{oy} \vec{a}) \vec{j}, \\ \vec{a}_3 \parallel \vec{k} &\Rightarrow \vec{a}_3 = (\text{pr}_{oz} \vec{a}) \vec{k}. \end{aligned}$$

Следствие. Если $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, то $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.



определяют направления самого вектора.

Для того, чтобы задать направление вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, нужно знать углы, которые данный вектор образует с координатными осями. На рисунке 4 изображен вектор $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, образующий углы α, β и γ с соответствующими координатными углами. Используя предыдущие две теоремы, можно найти, косинусы этих углов. Эти косинусы называются направляющими косинусами вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, они и

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|},$$

$$\cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|},$$

$$\cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

Рис. 4.

Замечания.

- 1) Направляющие косинусы вектора $\vec{a}$ — координаты его орта $\vec{a}_0$.
- 2) Для того, чтобы три угла α, β и γ задавали направление некоторого вектора, необходимо и достаточно, чтобы $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

5. Линейные операции с векторами, заданными в координатной форме.

Пусть даны два вектора, заданные декартовыми координатами,

$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, а также число $k \in \mathbb{R}$, тогда

$$\triangleright \vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$$

$$\triangleright k\vec{a} = (ka_x, ka_y, ka_z)$$

Эти два свойства означают, что при сложении векторов соответствующие координаты складываются, а при умножении на число умножаются на это число. Для доказательства этих формул достаточно использовать разложение векторов по базису и свойства линейных операций с векторами. Можно заметить, что эти две операции проводятся точно так же, как и операции с матрицами-строками, то есть с арифметическими векторами.

Разработал доцент кафедры высшей математики М. В. Лагунова