Раздел № 01 Линейная алгебра

Тема № 04 Ранг матрицы

Практическое занятие № 04

Учебные вопросы:

1. Вычисление ранга матрицы по строкам.
2. Вычисление ранга матрицы по столбцам.
3. Вычисление ранга матрицы методом окаймляющих миноров.

Литература

1. Сборник задач по математике в четырех частях. Под общей редакцией А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича
2. Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики.
3. А.Е. Умнов. Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

Решение задач

Напомним необходимые для решения задач сведения из теории матриц.

<u>Определение 1.</u> Базисным минором матрицы A размера $m\times n$ называется любой её минор порядка r ($r \le \min(m, n)$), если он отличен от нуля, а все миноры порядка ($r+1$) либо равны нулю, либо не существуют.

<u>Определение 2.</u> Порядок r базисного минора называется рангом матрицы A, а её строки и столбцы, входящие в базисный минор, называются базисными.

Ранг матрицы обозначается $\operatorname{rang} A$, $\operatorname{rank} A$ или $r(A)$.

Легко заметить, что матрица любого размера, все элементы которой равны нулю, имеет ранг, равный 0. В остальных случаях ранг матрицы – натуральное число.

<u>Определение 3.</u> Окаймляющий минор – это минор большего порядка по отношению к данному, если этот минор большего порядка содержит в себе данный минор.

<u>Теорема 1.</u> Если в матрице A все миноры порядка k равны нулю и можно составить миноры порядка $k+1$, то они также будут равны нулю.

<u>Определение 4.</u> Матрица называется ступенчатой, если для неё выполняются следующие условия:

- если какая-либо строка данной матрицы состоит из нулей, то и все последующие строки также состоят из нулей;
- если a_{ik} – первый ненулевой элемент i-той строки, а $a_{i+1,m}$ – первый ненулевой элемент (i+1)-ой строки, то $m > k$.

Диагональная и трапециевидная матрицы – частный случай ступенчатой матрицы.

<u>Определение 5.</u> Матрицы, получающиеся друг из друга с помощью элементарных преобразований над строками или столбцами, называются эквивалентными и обозначаются $A{\sim}B$.

<u>Теорема 2.</u> (О сохранении ранга матрицы при элементарных преобразованиях)

Ранг эквивалентных матриц совпадает, т.е.

$A{\sim}B \Rightarrow \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$.

<u>Замечание.</u> Обратная теорема неверна, то есть из равенства рангов нельзя сделать вывод об эквивалентности матриц. Очевидно, что эквивалентные матрицы имеют одинаковые размеры, а одинаковый ранг могут иметь матрицы разных размеров.

Следствие. Элементарные преобразования в матрице не меняют ранга этой матрицы.

Ранг диагональной, трапециевидной и ступенчатой матрицы равен числу ее ненулевых строк.

Задача 1

1. Найти ранг матрицы методом элементарных преобразований со строками.
2. Выполнить все элементарные преобразования **в целых числах**.
3. Указать базисные строки и базисные столбцы.
4. Выписать базисный минор, вычислить его.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 7 & -14 & 2 \\ 6 & -4 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -5 & 14 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -4 & 0 \\ 8 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение.
Матрица состоит из целых чисел, следовательно, можно выполнить элементарные преобразования только в целых числах.
Поскольку требуется выписать базисные строки и столбцы, выполняя элементарные преобразования со строками, занумеруем строки и будем сохранять эту нумерацию до конца элементарных преобразований. Столбцы нумеровать не будем, но и не будем менять их местами.

$$A=\begin{array}{r} I\\ II\\ III\\ IV\\ V\\ VI \end{array}\begin{pmatrix} 4 & -3 & 7 & -14 & 2\\ 6 & -4 & 2 & 4 & 7\\ 0 & 1 & -5 & 14 & 2\\ 2 & 3 & 1 & -4 & 0\\ 8 & -1 & 3 & 0 & 1\\ 3 & 5 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\sim\begin{bmatrix} IV\times(-2)+I\\ IV\times(-3)+II\\ IV\times(-4)+V\\ IV\times(-1)+VI \end{bmatrix}\sim\begin{array}{r} I\\ II\\ III\\ IV\\ V\\ VI \end{array}\begin{pmatrix} 0 & -9 & 5 & -6 & 2\\ 0 & -13 & -1 & 16 & 7\\ 0 & 1 & -5 & 14 & 2\\ 2 & 3 & 1 & -4 & 0\\ 0 & -13 & -1 & 16 & 1\\ 1 & 2 & -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}\sim\begin{bmatrix} I\leftrightarrow VI\\ II\times(-1)+V\\ II\leftrightarrow III\\ VI\times(-2)+IV \end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{array}{r} VI\\ III\\ II\\ IV\\ V\\ I \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 5 & 1\\ 0 & 1 & -5 & 14 & 2\\ 0 & -13 & -1 & 16 & 7\\ 0 & -1 & 5 & -14 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6\\ 0 & -9 & 5 & -6 & 2 \end{pmatrix}\sim\begin{bmatrix} III\times 13+II\\ III+IV\\ III\times 9+I\\ V\div(-6) \end{bmatrix}\sim\begin{array}{r} VI\\ III\\ II\\ IV\\ V\\ I \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 5 & 1\\ 0 & 1 & -5 & 14 & 2\\ 0 & 0 & -66 & 198 & 33\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -40 & 120 & 20 \end{pmatrix}\sim\begin{bmatrix} II\div 33\\ I\div 20\\ IV\leftrightarrow I \end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{array}{r} VI\\ III\\ II\\ I\\ V\\ IV \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 5 & 1\\ 0 & 1 & -5 & 14 & 2\\ 0 & 0 & -2 & 6 & 1\\ 0 & 0 & -2 & 6 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{bmatrix} II\times(-1)+I\\ I\leftrightarrow V \end{bmatrix}\sim\begin{array}{r} VI\\ III\\ II\\ V\\ I\\ IV \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 5 & 1\\ 0 & 1 & -5 & 14 & 2\\ 0 & 0 & -2 & 6 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Получили ступенчатую матрицу, у которой четыре ненулевых строки.
Следовательно, ранг этой матрицы и исходной матрицы A равен 4.
Очевидный ненулевой минор 4-го порядка ступенчатой матрицы – верхний левый угловой, составленный из 1-го, 2-го, 3-го и 5-го столбцов:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -5 & 2\\ 0 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-2\neq 0.$ Тогда этот минор и определяет базисный минор, базисные строки и столбцы исходной матрицы:

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l} rank A=4;\\ \textit{базисные строки}:\ VI,III,II,V;\\ \textit{базисные столбцы}:\ I,II,III,V;\\ \textit{базисный минор}:\ \Delta_4=\begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -5 & 2\\ 6 & -4 & 2 & 7\\ 8 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}. \end{array}\right.$$

Базисный минор можно вычислить также элементарными преобразованиями в определителе или по теореме разложения по строке или столбцу.

Применим комбинацию этих способов. Сначала сделаем элементарные преобразования со строками, чтобы получить больше нулей в 1-м столбце:

$$\Delta_4=\begin{vmatrix}3&5&-1&1\\0&1&-5&2\\6&-4&2&7\\8&-1&3&1\end{vmatrix}=\begin{bmatrix}IV-III\\I\times(-2)+III\\ \end{bmatrix}=\begin{vmatrix}3&5&-1&1\\0&1&-5&2\\0&-14&4&5\\2&3&1&-6\end{vmatrix}.$$

Теперь применим теорему разложения, выбрав 1-й столбец:

$$\Delta_4=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}+a_{41}A_{41}=a_{11}M_{11}-a_{21}M_{21}+a_{31}M_{31}-a_{41}M_{41}\quad\Rightarrow$$

$$\Delta_4=\begin{vmatrix}3&5&-1&1\\0&1&-5&2\\6&-4&2&7\\8&-1&3&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&5&-1&1\\0&1&-5&2\\0&-14&4&5\\2&3&1&-6\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}1&-5&2\\-14&4&5\\3&1&-6\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}5&-1&1\\1&-5&2\\-14&4&5\end{vmatrix}=$$

$$=3\cdot(-24-75-28-24-5+420)-2\cdot(-125+28+4-70-40+5)=3\cdot264+2\cdot198=1188\neq0.$$

Следовательно, минор действительно базисный.

Задача 2

1. Найти ранг матрицы методом элементарных преобразований со столбцами.
2. Выполнить все элементарные преобразования **в целых числах**.
3. Указать базисные строки и базисные столбцы.
4. Выписать базисный минор, вычислить его.

$$A=\begin{pmatrix}2&1&11&2&1\\1&0&4&-1&-1\\11&4&56&5&1\\2&-1&5&-6&-5\end{pmatrix}$$

Решение.

Аналогично предыдущей задаче, занумеруем столбцы и будем сохранять эту нумерацию до конца элементарных преобразований. Строки нумеровать не будем, но и не будем менять их местами.

$$A=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}I&II&III&IV&V\end{array}\\\begin{pmatrix}2&1&11&2&1\\1&0&4&-1&-1\\11&4&56&5&1\\2&-1&5&-6&-5\end{pmatrix}\end{array}\sim\left[I\leftrightarrow II\right]\sim\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}II&I&III&IV&V\end{array}\\\begin{pmatrix}1&2&11&2&1\\0&1&4&-1&-1\\4&11&56&5&1\\-1&2&5&-6&-5\end{pmatrix}\end{array}\sim\begin{bmatrix}II\times(-2)+I\\II\times(-11)+III\\II\times(-2)+IV\\II\times(-1)+V\end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}II&I&III&IV&V\end{array}\\\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&4&-1&-1\\4&3&12&-3&-3\\-1&4&16&-4&-4\end{pmatrix}\end{array}\sim\begin{bmatrix}I\times(-4)+III\\I+IV\\I+V\end{bmatrix}\sim\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}II&I&III&IV&V\end{array}\\\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\4&3&0&0&0\\-1&4&0&0&0\end{pmatrix}\end{array}$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}rankA=2;\\ \text{базисные строки}:\ I,II;\\ \text{базисные столбцы}:\ I,II;\\ \text{базисный минор}:\ \Delta_2=\begin{vmatrix}2&1\\1&0\end{vmatrix}=-1\neq0.\end{array}\right.$$

Задача 3
Найти ранг матрицы
1) методом окаймляющих миноров,
2) методом элементарных преобразований.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&7\\8&9&10&11\end{pmatrix}.$$

Решение.
1) Метод окаймляющих миноров.
Поскольку матрица не нулевая, её ранг не равен нулю.
Все элементы матрицы отличны от нуля, следовательно, ранг матрицы не меньше единицы. Не сложно увидеть, что любой минор второго порядка у этой матрицы отличен от нуля. Значит, ранг матрицы не меньше двух.
Для того чтобы проверить все окаймляющие миноры 3-го порядка, выберем один из миноров 2-го порядка, например, $\Delta_2=\begin{vmatrix}1&2\\2&3\end{vmatrix}=-1\neq 0.$
Всего окаймляющих миноров 3-го порядка для выбранного минора шесть.
Если хотя бы один из них отличен от нуля, остальные миноры 3-го порядка считать не надо, ранг матрицы в этом случае будет не меньше трех. И надо переходить к окаймляющим минорам 4-го порядка, которых будет два. Миноров 5-го порядка для данной матрицы нет, поскольку столбцов у этой матрицы только четыре.
Если же все окаймляющие миноры 3-го порядка окажутся равны нулю, ранг матрицы будет равен двум. Считать миноры 4-го порядка в этом случае не надо, поскольку по **теореме 1** эти миноры равны нулю.
Составим и посчитаем все эти миноры методом элементарных преобразований, вычитая из 2-й строки 1-ю, а из 3-й строки 2-ю.
а) окаймляющие миноры с добавление 3-й строки:

$$\Delta_3^{(1)}=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\1&1&1\\1&1&1\end{vmatrix}=0,\quad \Delta_3^{(2)}=\begin{vmatrix}1&2&4\\2&3&5\\3&4&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\1&1&1\\1&1&1\end{vmatrix}=0;$$

б) окаймляющие миноры с добавление 4-й строки:

$$\Delta_3^{(3)}=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&4\\4&5&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\1&1&1\\2&2&2\end{vmatrix}=0,\quad \Delta_3^{(4)}=\begin{vmatrix}1&2&4\\2&3&5\\4&5&7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\1&1&1\\2&2&2\end{vmatrix}=0;$$

в) окаймляющие миноры с добавление 5-й строки:

$$\Delta_3^{(5)}=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&4\\8&9&10\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\1&1&1\\6&6&6\end{vmatrix}=0,\quad \Delta_3^{(6)}=\begin{vmatrix}1&2&4\\2&3&5\\8&9&11\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\1&1&1\\6&6&6\end{vmatrix}=0.$$

Все миноры равны нулю, поскольку в каждом определителе есть две одинаковые или пропорциональные строки.
Таким образом, $rankA=2$.
2) Метод элементарных преобразований.

Выполним элементарные преобразования со строками матрицы.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&7\\8&9&10&11\end{pmatrix}\sim\begin{bmatrix}I\times(-2)+II\\I\times(-3)+III\\I\times(-4)+IV\\I\times(-8)+V\end{bmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-2&-3\\0&-2&-4&-6\\0&-3&-6&-9\\0&-1&-2&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad ranrA=2.$$

Заметим, что можно было выполнить такие же элементарные преобразования, как описано выше в определителях, а именно, вычитая из каждой строки предыдущую строку:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&7\\8&9&10&11\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\4&4&4&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

На этом примере видно, что метод окаймляющих миноров наиболее трудоемкий. Но не всегда. Задача 4 – тому пример.

Задача 4

Найти ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&1&1&0\\0&1&0&1&1\end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}=1\neq0,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=1+1=2\neq0.$$

Определители более высокого порядка будем считать по теореме разложения по последнему столбцу:

$$\Delta_4=\begin{vmatrix}1&0&1&0\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=\Delta_3=2\neq0,\quad \Delta_5=\begin{vmatrix}1&0&1&0&0\\1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&1&1&0\\0&1&0&1&1\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}1&0&1&0\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{vmatrix}=\Delta_4=2\neq0.$$

Следовательно, $rankA=5$.

Выполните задачу способом элементарных преобразований и убедитесь, что в данном примере метод окаймляющих миноров проще.

Разработал старший преподаватель кафедры высшей математики Н. В. Петрова.