

Раздел № 01 Линейная алгебра

Тема № 05 Метод Гаусса решения систем линейных
алгебраических уравнений

Практическое занятие № 05

Учебные вопросы:

1. Три способа решения системы линейных уравнений с квадратной невырожденной матрицей.
2. Метод Гаусса для определённой системы линейных уравнений.
3. Метод Гаусса для неопределённой системы линейных уравнений.

Литература

1. Сборник задач по математике в четырех частях. Под общей редакцией А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича
2. Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики.
3. А.Е. Умнов. Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

Решение задач

Напомним необходимые для решения задач сведения.

[illegible]

Вид (1) системы называется **скалярным**, а (2) – **матричным**.

Если столбец свободных членов системы есть нулевой столбец, то такая система называется **однородной** системой линейных алгебраических уравнений – **ОСЛАУ**, во всех остальных случаях система называется **неоднородной** системой линейных алгебраических уравнений – **НСЛАУ**.

Система называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение, и **несовместной**, если у системы не существует решений.

Определённая система – это система, имеющая единственное решение.

Неопределённая система – это система, имеющая бесконечное множество решений.

Если основная матрица системы квадратная и невырожденная, для решения системы применима **теорема Крамера**:

$$A_{n \times n} X_{n \times 1} = B_{n \times 1} \quad (3), \quad \Delta = \det A \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists! X.$$

При этом компоненты столбца X находятся по правилу: $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \quad \forall i \in \overline{1, n}$, где Δ_i получается из Δ заменой i -того столбца на столбец $B_{n \times 1}$.

Матричный метод

Если матрица A невырожденная, тогда решение матричного уравнения (3) существует, причём единственное, и $X = A^{-1} \cdot B$.

Теорема Кронекера – Капелли (Совместность или существование решения)

Рассмотрим НСЛАУ общего вида

$$A_{m \times n} X_{n \times 1} = B_{m \times 1}, \quad r = \text{rang} A, \quad r_1 = \text{rang}(A|B).$$

Имеет место **критерий** существования решения НСЛАУ:

$$AX = B, \quad \exists X \iff r = r_1.$$

Следствия

1. $r = r_1 = n \Leftrightarrow \exists! X$, т.е. система определённая.

2. $r = r_1 < n \Leftrightarrow \exists$ бесконечное множество решений, т.е. НСЛАУ неопределённая.

Замечание.

Обратите внимание, что для **НСЛАУ** бывают только такие ответы:

1) НСЛАУ **несовместная**, т.е. не имеет решений ($r \neq r_1 \Leftrightarrow \bar{\exists} X$).

2) НСЛАУ имеет единственное решение ($r = r_1 = n \Leftrightarrow \exists! X$).

Это – определённая НСЛАУ.

3) НСЛАУ имеет бесконечно много решений ($r = r_1 < n \Leftrightarrow \exists L(X)$).

Это – неопределённая НСЛАУ.

Также важно заметить, что **ОСЛАУ всегда совместна**, потому что у неё есть **тривиальное решение** – столбец, состоящий из всех нулей.

Задача 1

Решить систему методом Крамера, методом Гаусса, методом обратной матрицы.

Выполнить проверку в матричном виде.

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -3. \end{cases}$$

Решение.

Запишем систему в матричном виде

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & -2 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

1. Метод Крамера.

Составим и посчитаем определители по теореме Крамера.

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & -2 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \Leftrightarrow \exists X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_1/\Delta \\ \Delta_2/\Delta \\ \Delta_3/\Delta \end{pmatrix}.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -4 & -3 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -5, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 6 & -1 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -10, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -3 & -4 \\ 6 & -2 & -1 \\ 5 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 5 \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -5/(-5) \\ -10/(-5) \\ 5/(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Проверка.

$$AX = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & -2 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-6-2 \\ 6-4-3 \\ 5-6-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = B.$$

2. Метод Гаусса.

Составим расширенную матрицу системы, выполним элементарные преобразования со строками матрицы, не переставляя столбцы.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 2 & -4 \\ 6 & -2 & 3 & -1 \\ 5 & -3 & 2 & -3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right).$$

Полученная матрица – матрица **равносильной НСЛАУ**, решение которой легко найти, читая и удовлетворяя уравнения снизу:

$$\begin{cases} 1 \cdot x_3 = -1, \\ 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 1, \\ 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = -1, \\ x_2 = 1 - x_3 = 1 - (-1) = 2, \\ x_1 = 2 - x_2 - x_3 = 2 - 2 + 1 = 1. \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3. Матричный метод.

Поскольку матрица A невырожденная, как мы убедились в методе Крамера, решение матричного уравнения (3) существует, причём единственное, и $X = A^{-1} \cdot B$.

Посчитаем обратную матрицу любым изученным методом и выполним соответствующую

щее умножение матрицы на столбец:

$$A^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 3 & -2 & 0 \\ -8 & -3 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 3 & -2 & 0 \\ -8 & -3 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -20+15 \\ -12+2 \\ 32+3-30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Задача 2

Решить систему методом Гаусса.

Проверить в матричном виде.

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ -x_1 + x_3 + 3x_4 = -2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 9x_4 = 6. \end{cases}$$

Решение.

Составим расширенную матрицу системы, выполним элементарные преобразования со строками матрицы, не переставляя столбцы.

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & 9 & 6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$r = r_1 = n = 4 \Leftrightarrow \exists! X, \text{ т.е. система определённая.}$$

Находим решение НСЛАУ по полученной подобной матрице:

$$\begin{cases} 1 \cdot x_4 = 0, \\ 1 \cdot x_3 + 6 \cdot x_4 = -1, \\ 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 = 1, \\ 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 = 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_4 = 0, \\ x_3 = -1, \\ x_2 = 2, \\ x_1 = 1. \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Проверка.

Замечание.

Проверку необходимо делать для исходной матрицы, а не для полученной элементарными преобразованиями подобной матрицы.

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 \\ 4-3 \\ 2+2+1-1-1 \\ -1-1 \\ 2+6-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = B.$$

Замечание.

В дальнейшем для СЛАУ будем писать сразу расширенную матрицу системы.

Скалярный вид системы писать не будем.

Задача 3

Решить систему $AX = B$ методом Гаусса, если дана расширенная матрица системы.

Решение.

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 5 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$r = 3, \quad r_1 = 4, \quad r \neq r_1 \Leftrightarrow \bar{\exists} X$, т.е. система несовместная.

Это же получается, если прочитать последнее уравнение равносильной НСЛАУ:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 1.$$

Очевидно, что это уравнение не имеет решения. Следовательно, исходная НСЛАУ не имеет решений, т.е. несовместная.

Задача 4

Решить систему $AX = B$ методом Гаусса, если дана расширенная матрица системы.

Проверить в матричном виде.

Решение.

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 6 & -3 & -5 & 1 & 7 \\ 1 & 8 & -10 & -2 & 10 & 8 \\ 2 & 18 & -27 & -1 & 29 & 17 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 6 & -3 & -5 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & -7 & 3 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

$$r = \text{rang} A = 2, \quad r_1 = \text{rang}(A|B) = 2 \Rightarrow r = r_1 \Leftrightarrow \exists X.$$

$$n = 5 \Rightarrow r < n \Rightarrow \exists k = n - r = 5 - 2 = 3.$$

Система совместная, имеет бесконечное множество решений, следовательно, эта система неопределённая.

Две переменные ($r = \text{rang} A = 2$) будут базисные, а три оставшиеся ($k = n - r = 3$) будут свободные, т.е. произвольные. Следовательно, бесконечное множество решений заданной НСЛАУ будет зависеть от трёх произвольных констант, т.е. $X = X(C_1, C_2, C_3)$.

Замечание.

Выбор переменных, которые будут базисные, не однозначен. Но количество базисных и свободных переменных зависит от ранга матрицы системы, поэтому определяется одним и тем же числом, не зависимо от выбора базисных переменных.

Решим систему, найдёт бесконечное множество столбцов, удовлетворяющих заданной системе.

1) Читаем последнее, ненулевое, уравнение: $2x_2 - 7x_3 + 3x_4 + 9x_5 = 1$.

Здесь четыре переменные в одном уравнении, следовательно, три ($4 - 1 = 3$) переменные свободные.

Итак,

$$\left[\begin{array}{l} x_3 = C_1 \\ x_4 = C_2 \\ x_5 = C_3 \end{array} \right] \Rightarrow X = X(C_1, C_2, C_3) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

$$2) \text{ Из второго уравнения имеем: } 2x_2 - 7 \cdot C_1 + 3 \cdot C_2 + 9 \cdot C_3 = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{7}{2}C_1 - \frac{3}{2}C_2 - \frac{9}{2}C_3 + \frac{1}{2}.$$

3) Далее подставляем x_2, x_3, x_4, x_5 в первое уравнение, считаем x_1 , получаем полностью решение НСЛАУ:

$$x_1 + 6x_2 - 3x_3 - 5x_4 + x_5 = 7 \Rightarrow x_1 = 7 - 6 \cdot \left(\frac{7}{2}C_1 - \frac{3}{2}C_2 - \frac{9}{2}C_3 + \frac{1}{2} \right) + 3 \cdot C_1 + 5 \cdot C_2 - C_3 \Rightarrow$$

$$X = X(C_1, C_2, C_3) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18C_1 + 14C_2 + 26C_3 + 4 \\ \frac{7}{2}C_1 - \frac{3}{2}C_2 - \frac{9}{2}C_3 + \frac{1}{2} \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}.$$

Полученное таким образом решение называется **общим решением** НСЛАУ.

Для проверки выберем произвольное, так называемое **частное решение**, из этого множества, придавая константам фиксированные значения.

Сделаем это для двух частных решений.

Во-первых, проверим решение, когда все константы равны нулю.

А затем возьмём все константы отличные от нуля.

$$\text{а) } X_{q1} = X(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow AX_{q1} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 & -5 & 1 \\ 1 & 8 & -10 & -2 & 10 \\ 2 & 18 & -27 & -1 & 29 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+3 \\ 4+4 \\ 8+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 17 \end{pmatrix} = B.$$

$$\text{б) } X_{q2} = X(2, -2, 2) = \begin{pmatrix} -36 - 28 + 52 + 4 \\ 7 + 3 - 9 + 1/2 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3/2 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$AX_{q2} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 & -5 & 1 \\ 1 & 8 & -10 & -2 & 10 \\ 2 & 18 & -27 & -1 & 29 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 \\ 3/2 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 + 9 - 6 + 10 + 2 \\ -8 + 12 - 20 + 4 + 20 \\ -16 + 27 - 54 + 2 + 58 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 17 \end{pmatrix} = B.$$

В заключение заметим, проверку можно сделать для общего решения $X(C_1, C_2, C_3)$, т. е. проверить равенство $A \cdot X(C_1, C_2, C_3) = B$, но обычно проверка делается для произвольно выбранных частных решений.

Задача 5

Решить систему $AX = B$ методом Гаусса, если дана расширенная матрица системы.

Решение.

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -5 & 0 & 8 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 7 & 8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

$$r = \text{rang} A = 3, \quad r_1 = \text{rang}(A|B) = 3 \Rightarrow r = r_1 \Leftrightarrow \exists X$$

$$n = 5 \Rightarrow r < n \Rightarrow \exists L(X): \dim L(X) = k = n - r = 5 - 3 = 2 \Rightarrow X = X(C_1, C_2).$$

Система совместная и неопределённая.

1) Читаем последнее уравнение: $x_3 = 3$.

Следовательно, в этом уравнении, в отличие от предыдущей задачи, произвольные константы поставить нельзя. И переменная x_3 свободной быть не может.

2) Читаем следующее снизу уравнение: $3x_2 + x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 2$.

Здесь четыре переменные в одном уравнении, но одна переменная, x_3 , уже не может быть произвольной. Следовательно, только две переменные ($4 - 1 - 1 = 2$) свободные, т.е. две компоненты в столбце решений нужно задать как C_1, C_2 .

$$\begin{bmatrix} 3x_2 + x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 2, \\ x_3 = 3 \end{bmatrix} \Rightarrow x_4 = C_1, \quad x_5 = C_2 \Rightarrow X = X(C_1, C_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ 3 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

Из второго уравнения имеем: $3x_2 + 1 \cdot 3 + 4 \cdot C_1 + 6 \cdot C_2 = 2 \Rightarrow x_2 = -(4/3)C_1 - 2C_2 - 1/3$.

3) Далее подставляем полученные компоненты в первое уравнение, находим из него x_1 и получаем общее решение НСЛАУ:

$$2x_1 - x_2 - 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \Rightarrow X = X(C_1, C_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1/3)C_1 - (3/2)C_2 + 13/3 \\ x_2 = -(4/3)C_1 - 2C_2 - 1/3. \\ 3 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

Разработал старший преподаватель кафедры высшей математики Н. В. Петрова.