Раздел № 01 Линейная алгебра

Тема №01 Определители и квадратные матрицы 2-го и 3-го порядков.

Практическое занятие №01

Учебные вопросы:

1. Определитель квадратной матрицы второго порядка.
2. Решение линейной системы второго порядка методом Крамера.
3. Определитель квадратной матрицы третьего порядка. Правило Саррюса.
4. Свойства определителей.
5. Решение линейной системы третьего порядка методом Крамера.

Литература

1. Сборник задач по математике в четырех частях. Под общей редакцией А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича
2. Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики.
3. А.Е. Умнов. Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

Решение задач

Задача 1. Вычислите определители второго порядка по правилу Саррюса.

1) $\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} -2 & -7 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} 9 & -2 \\ -27 & 6 \end{vmatrix}$

Решение.

По правилу Саррюса определитель второго порядка вычисляется следующим образом:

1) $\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 - 1 \cdot (-3) = 20 + 3 = 23.$

2) $\begin{vmatrix} -2 & -7 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 4 - (-3) \cdot (-7) = -8 - 21 = -29.$

3) $\begin{vmatrix} 9 & -2 \\ -27 & 6 \end{vmatrix} = 9 \cdot 6 - 27 \cdot (-2) = 54 - 54 = 0.$

Задача 2. Решите систему двух линейных уравнений методом Крамера.

$$\begin{cases} 3x - 5y = 13, \\ 2x + 7y = 81. \end{cases}$$

Решение.

По теореме Крамера система имеет решение, причём, единственное, если главный определитель системы отличен от нуля. Проверим это:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 21 + 10 = 31 \neq 0.$$

Таким образом, теорема Крамера применима к данной системе.

Посчитаем определители Δ_x, Δ_y, которые получаются из главного определителя заменой соответственно первого и второго столбца на столбец свободных членов.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 13 & -5 \\ 81 & 7 \end{vmatrix} = 91 + 405 = 496, \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 13 \\ 2 & 81 \end{vmatrix} = 243 - 26 = 217.$$

Следовательно, по теореме Крамера имеем

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{496}{31} = 16, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{217}{31} = 7.$$

Ответ: $x = 16$, $y = 7$.

Задача 3. Вычислите определители третьего порядка по правилу Саррюса.

1) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

Решение.

По правилу Саррюса определитель третьего порядка вычисляется следующим образом:

1) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \left(5 \cdot (-1) \cdot 3 + 0 \cdot 5 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \cdot (-2)\right) - \left(0 \cdot (-1) \cdot (-2) + 2 \cdot 5 \cdot 5 + 1 \cdot 0 \cdot 3\right) =$

$= -15 - 4 - 50 = -69.$

2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = (1\cdot 5\cdot 9 + 2\cdot 6\cdot 7 + 3\cdot 4\cdot 8) - (3\cdot 5\cdot 7 + 1\cdot 6\cdot 8 + 2\cdot 4\cdot 9) =$

$= 45 + 84 + 96 - 105 - 48 - 72 = 0.$

Задача 4. Вычислите определители третьего порядка, используя свойства определителей.

1) $\begin{vmatrix} 2 & 13 & 0 \\ -1 & -26 & 4 \\ 25 & -195 & 35 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

Решение.

1) К первому определителю применим следующее свойство:

«Общий множитель элементов какой-либо строки (столбца) определителя можно выносить за знак определителя».

Вынесем общий множитель «5» из третьей строки, затем «-13» из второго столбца, тем самым упростив вычисление определителя по правилу Саррюса:

$$\begin{vmatrix} 2 & 13 & 0 \\ -1 & -26 & 4 \\ 25 & -195 & 35 \end{vmatrix} = 5\cdot\begin{vmatrix} 2 & 13 & 0 \\ -1 & -26 & 4 \\ 5 & -39 & 7 \end{vmatrix} = 5\cdot(-13)\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 7 \end{vmatrix} = -65\cdot(28-20-24-7) =$$

$= -65\cdot(-23) = 1495.$

2) Второй определитель был посчитан выше, в задаче 3. Применим к нему свойство, которое в дальнейшем будем называть «элементарное преобразование»:

«Определитель не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) прибавить соответствующие элементы параллельной строки (столбца), умноженные на одно и то же число k».

Умножим элементы первой строки на «-4» и прибавим к соответствующим элементам второй строки, затем умножим элементы первой строки на «-7» и прибавим к соответствующим элементам третьей строки. Определитель при этом не изменится:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} I\times(-4)+II \\ I\times(-7)+III \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix}$$

В квадратных скобках символически записали элементарные преобразования со строками. Такую пояснительную запись будем использовать в дальнейшем для аналогичных преобразований.

Теперь вынесем общий множитель из второй и третьей строки:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix} = (-3)(-6)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

К последнему определителю применили следующее свойство: «Если определитель содержит две одинаковых строки (столбца), то он равен нулю».

3) К третьему определителю, который тоже посчитан в задаче 3, сначала применим свойство: «При перестановке местами двух любых строк (столбцов) опреде-

лителя его величина меняет знак». А затем применим элементарные преобразования, чтобы привести его к верхнетреугольному виду, т. е. к виду, когда под главной диагональю определителя остаются только нули. Преобразования запишем символически, как показано выше.

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 5 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \left[I \times (-5) + II\right] = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 5 & -27 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \left[III \times (-2) + II\right] =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -33 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \left[II \times (-2) + III\right] = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -33 \\ 0 & 0 & 69 \end{vmatrix} = -69.$$

Последний определитель равен произведению элементов главной диагонали, поскольку по правилу Саррюса во всех слагаемых, кроме первого, есть сомножитель, равный нулю.

Приведение определителя методом элементарных преобразований в нём к верхнетреугольному виду, является одним из способов вычисления определителей.

Задача 5. Решите систему трёх линейных уравнений методом Крамера.

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1, \\ 2x + 3z = 1, \\ x - y - 2z = 4. \end{cases}$$

Решение.

По теореме Крамера система имеет решение, причём, единственное, если главный определитель системы отличен от нуля. Проверим это:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 2 + 3 - 8 = -13 \neq 0.$$

Таким образом, теорема Крамера применима к данной системе.

Посчитаем определители Δ_x, Δ_y, Δ_z которые получаются из главного определителя заменой соответственно первого, второго и третьего столбца на столбец свободных членов.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -26, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 13.$$

Следовательно, по теореме Крамера имеем

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-26}{-13} = 2, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{0}{-13} = 0, \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{13}{-13} = -1.$$

Ответ: $x = 2$, $y = 0$, $z = -1$.

Разработал старший преподаватель кафедры высшей математики Н. В. Петрова.