

Раздел № 03 Комплексные числа и

многочлены

Тема № 01 Комплексные числа

Практическое занятие № 11

Учебные вопросы:

1. Алгебраическая форма комплексного числа. Сложение, умножение и деление комплексных чисел в алгебраической форме.
2. Тригонометрическая форма комплексного числа. Формулы Муавра.
3. Показательная форма комплексного числа. Формулы Эйлера.

Литература

1. Сборник задач по математике в четырех частях.
Под общей редакцией А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича.
2. Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики.
3. А.Е. Умнов. Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

Решение задач

Напомним необходимые для решения задач сведения из теории комплексных чисел.

Определение 1. Комплексным числом называется упорядоченная пара вещественных чисел (a, b) , $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$.

Чтобы не путать с вещественными числами, комплексные числа часто обозначают буквой z , т. е. $z = (a, b)$. Множество всех комплексных чисел обозначается $\mathbb{C}$.

Определение 2. Числа a и b называют соответственно вещественной и мнимой частью числа z и пишут $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$.

Определение 3. Число $(0, 1)$, квадратом которого является (-1) , называется мнимой единицей и обозначается буквой i , т. е. $i^2 = -1$.

Запись комплексного числа с использованием мнимой единицы $z = a + bi$ называется алгебраической формой комплексного числа.

Определение 4. Число $\bar{z} = (a, -b) = a - bi$ называется комплексно-сопряженным к числу $z = (a, b) = a + bi$.

Доказано, что $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$.

Тригонометрическая форма комплексного числа: $z = a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$,

где $r = |z|$, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ – модуль комплексного числа, угол $\varphi = \operatorname{Arg} z$ – аргумент этого числа, который определяется не однозначно, а с точностью до $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Главным значением аргумента считается угол $\varphi \in [0, 2\pi)$ или $\varphi \in (-\pi, \pi]$ и обозначается $\varphi = \arg z$.

Для нахождения аргумента используются формулы:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}, \quad \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Но при этом обязательно учитывается, в какой четверти координатной плоскости находится комплексное число.

Верны следующие формулы для умножения и деления комплексных чисел:

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \\ z_2 &= r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2), \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)), \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \end{aligned} \right.$$

И формулы Муавра

- для возведения комплексного числа в любую натуральную степень:
 $z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ – первая формула Муавра;
- для извлечения корня натуральной степени из комплексного числа:
 $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), k \in \overline{0, (n-1)}$ – вторая формула Муавра.

Формула Эйлера $e^{i\varphi} \stackrel{\text{def}}{=} \cos \varphi + i \sin \varphi$ даёт нам удобную и компактную в использовании показательную форму комплексного числа: $z = r e^{i\varphi}$.

А также следствия:

$$e^{i\pi} = -1, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad e^{2\pi ki} = +1, \quad \cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

И формулы Муавра тогда можно записать так:

$$z = r e^{i\varphi} \Rightarrow \begin{cases} z^n = r^n e^{in\varphi}, \\ \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \exp \left\{ i \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right\}, k \in \overline{0, (n-1)}. \end{cases}$$

И наконец, из формулы Эйлера следуют важнейшие свойства показательной функции над полем комплексных чисел:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \Rightarrow \begin{cases} |e^{i\varphi}| = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1, \\ \exp\{z + 2\pi ki\} = \exp\{z\} \quad \forall k \in \mathbb{Z}, z \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

1) Все числа вида $e^{i\varphi}$ лежат на окружности радиуса единица с центром в начале координат, т. е. в множестве $\{z: |z| = 1\}$.

2) Показательная функция e^z над полем комплексных чисел имеет период $2\pi i$.

Задача 1

Вычислить а) $3i^{147} + 2i^{131} + i^3 - i^{11}$; б) $2i^{367} - 5i^{1012} - 2i^{26} - i^{44445}$.

Решение.

Сделаем а) одним способом, б) – другим.

1 способ – для а)

По определению мнимой единицы имеем $i^2 = -1$, поэтому

$$\begin{aligned} 3i^{147} + 2i^{131} + i^3 - i^{11} &= 3i^{146} \cdot i + 2i^{130} \cdot i + i^2 \cdot i - i^{10} \cdot i = \\ &= 3(i^2)^{73} \cdot i + 2(i^2)^{65} \cdot i + i^2 \cdot i - (i^2)^5 \cdot i = \\ &= 3(-1)^{73} \cdot i + 2(-1)^{65} \cdot i - 1 \cdot i - (-1)^5 \cdot i = -3i - 2i - i + i = -5i. \end{aligned}$$

2 способ – для б)

Заметим закономерность:

$$\begin{bmatrix} i^0 = 1, & i^4 = 1, \\ i^1 = i, & i^5 = i, \\ i^2 = -1, & i^6 = -1, \\ i^3 = -i, & i^7 = -i. \end{bmatrix} \Rightarrow i^{4+m} = i^4 \cdot i^m = i^m \Rightarrow i^{4k+m} = (i^4)^k \cdot i^m = i^m \quad \forall k, m \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, в показателе степени числа i надо найти максимальное число, нацело делящееся на четыре, и откинуть его.

$$2i^{367} + 5i^{1012} + 4i^{26} - 7i^{44445} = 2i^3 + 5i^0 + 4i^2 - 7i^1 = -2i + 5 - 4 - 7i = 1 - 9i.$$

Задача 2

$$z_1 = 2 + 3i, \quad z_2 = 4 - i.$$

Вычислить в алгебраической форме: $3z_1 + 2\overline{z_2}$, $z_1 \cdot \overline{z_2}$, $\frac{z_2}{z_1}$.

Решение.

$$3z_1 + 2\overline{z_2} = 3(2 + 3i) + 2(4 + i) = 14 + 11i.$$

$$z_1 \cdot \overline{z_2} = (2 + 3i) \cdot (4 + i) = (8 + 3i^2) + i(12 + 2) = 5 + 14i.$$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{4 - i}{2 + 3i} = \frac{(4 - i) \cdot (2 + 3i)}{(2 + 3i) \cdot (2 + 3i)} = \frac{(8 - 3i^2) + i(12 - 2)}{2^2 + 3^2} = \frac{11 + 10i}{13} = \frac{11}{13} + \frac{10}{13}i.$$

Задача 3

Вычислить в алгебраической форме

$$\frac{(3 + i)^3 - 23 - 22i}{(2 - 3i)^2 + 8 + 10i} - \frac{5i}{2 + i}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{(3 + i)^3 - 23 - 22i}{(2 - 3i)^2 + 8 + 10i} - \frac{5i}{2 + i} &= \frac{27 + 9i^2 + 3i + i^3 - 23 - 22i}{4 - 12i + 9i^2 + 8 + 10i} - \frac{5i(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = \\ &= \frac{27 - 9 + 3i - i - 23 - 22i}{4 - 12i - 9 + 8 + 10i} - \frac{10i + 5}{4 + 1} = \frac{-5 + 4i}{3 - 2i} - 2i - 1 = \end{aligned}$$

$$= \frac{(-5 + 4i)(3 + 2i)}{(3 - 2i)(3 + 2i)} - 2i - 1 = \frac{-23 + 2i}{13} - 2i - 1 = -\frac{36}{13} - \frac{24}{13}i.$$

Задача 4

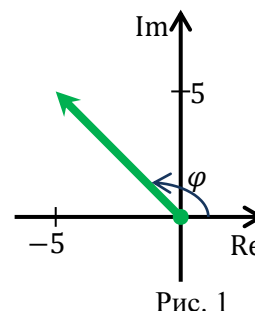
Вычислить а) $(-5 + 5i)^{31}$; б) $\left(\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^{1581}$.

Выполнить действия в тригонометрической форме, ответ записать в алгебраической форме.

Решение.

а) Запишем число, степень которого надо посчитать, в тригонометрической форме. Для этого изобразим это число на комплексной плоскости – Рис. 1.

Число находится во второй четверти координатной плоскости.



$$z = -5 + 5i \Rightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt{(-5)^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}, \\ z \in \text{II} \Rightarrow \varphi = \arg z = \pi - \arctg \left| \frac{5}{-5} \right| = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}, \end{cases}$$

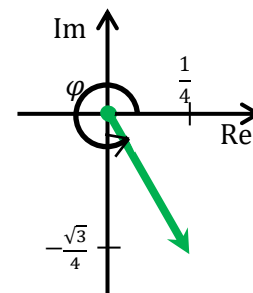
$$\Rightarrow z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

Возведём в указанную степень, используя первую формулу Муавра и периодичность тригонометрических функций.

$$\begin{aligned} (-5 + 5i)^{31} &= \left(5\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \right)^{31} = (5\sqrt{2})^{31} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)^{31} = \\ &= (5\sqrt{2})^{31} \left(\cos \frac{93\pi}{4} + i \sin \frac{93\pi}{4} \right) = 5^{31} \cdot 2^{\frac{31}{2}} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = 5^{31} \cdot 2^{\frac{31}{2}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \\ &= -5^{31} \cdot 2^{15} (1 + i). \end{aligned}$$

$$\frac{93}{4}\pi = \left(23 + \frac{1}{4} \right) \pi = 22\pi + \frac{5}{4}\pi \Rightarrow \cos \frac{93\pi}{4} + i \sin \frac{93\pi}{4} = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}.$$

б) Аналогично – Рис. 2. Число $z = \frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}$ находится в четвёртой четверти координатной плоскости.



$$z = \frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{1}{2}, \\ z \in \text{IV} \Rightarrow \varphi = \arg z = -\arctg \left| \frac{-\sqrt{3}}{1} \right| = -\frac{\pi}{3}, \end{cases}$$

$$\Rightarrow z = \frac{1}{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4} \right)^{1581} &= \left(\frac{1}{2} \right)^{1581} \left(\cos \left(-\frac{1582\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{1582\pi}{3} \right) \right) = \\ &= 2^{-1581} (\cos(-527\pi) + i \sin(-527\pi)) = \\ &= 2^{-1581} (\cos(-\pi) + i \sin(-\pi)) = -2^{-1581}. \end{aligned}$$

$$527\pi = 526\pi + \pi \Rightarrow \cos(-527\pi) + i \sin(-527\pi) = \cos(-\pi) + i \sin(-\pi) = -1.$$

Замечание.

Можно было бы при вычислении указанной степени каждого числа вынести общий множитель за скобки:

$(-5 + 5i)^{31} = 5^{31}(-1 + i)^{31}$ или так: $(-5 + 5i)^{31} = -5^{31}(1 - i)^{31}$, а потом выполнить возведение в степень комплексного сомножителя.

Задача 5

Вычислить

$$\frac{(1-i)^{10}(1-\sqrt{3}i)^{15}}{(\sqrt{3}+i)^7(2+2\sqrt{3}i)^5}.$$

Выполнить действия в показательной форме, ответ записать в алгебраической форме.
Решение.

Представим все числа, которые надо возвести в степень, в показательной форме и выполним возведение в степень для каждого числа отдельно.

$$z_1 = (1-i) \in IV \Rightarrow |z_1| = \sqrt{2}, \arg z_1 = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow z_1^{10} = (1-i)^{10} = \left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^{10} = 2^5 e^{-i\frac{5\pi}{2}} = 2^5 e^{-i\frac{\pi}{2}};$$

$$z_2 = (1-\sqrt{3}i) \in IV \Rightarrow |z_2| = 2, \arg z_2 = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow z_2^{15} = (1-\sqrt{3}i)^{15} = \left(2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^{15} = 2^{15} e^{-5\pi i} = 2^{15} e^{-\pi i};$$

$$z_3 = (\sqrt{3}+i) \in I \Rightarrow |z_3| = 2, \arg z_3 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow z_3^7 = (\sqrt{3}+i)^7 = \left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^7 = 2^7 e^{i\frac{7\pi}{6}};$$

$$w = (1+\sqrt{3}i) \in I \Rightarrow |w| = 2, \arg w = \frac{\pi}{3} \Rightarrow w^5 = (1+\sqrt{3}i)^5 = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^5 = 2^5 e^{i\frac{5\pi}{3}};$$

$$z_4 = 2(1+\sqrt{3}i) = 2w \Rightarrow z_4^5 = 2^5 \cdot w^5 = 2^{10} e^{i\frac{5\pi}{3}}.$$

Подставим в искомое выражение

$$\begin{aligned} \frac{(1-i)^{10}(1-\sqrt{3}i)^{15}}{(\sqrt{3}+i)^7(2+2\sqrt{3}i)^5} &= \frac{2^5 e^{-i\frac{\pi}{2}} \cdot 2^{15} e^{-\pi i}}{2^7 e^{i\frac{7\pi}{6}} \cdot 2^{10} e^{i\frac{5\pi}{3}}} = 2^3 \exp\left\{i\pi\left(-\frac{1}{2} - 1 - \frac{7}{6} - \frac{5}{3}\right)\right\} = \\ &= 2^3 \exp\left\{i\pi\left(-\frac{13}{3}\right)\right\} = 2^3 \exp\left\{i\pi\left(-4 - \frac{1}{3}\right)\right\} = 2^3 \exp\left\{i\pi\left(-\frac{1}{3}\right)\right\} = 2^3 e^{-i\frac{\pi}{3}} = \\ &= 2^3 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2^3 \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4(1-i\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Задача 6

Используя формулы Эйлера и Муавра

а) выразить $\sin^3 \varphi$ через косинусы и синусы кратных дуг;

б) выразить $\cos 4\varphi$ через $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$;

в) доказать равенства:

$$\begin{aligned} \sin \varphi + \sin 2\varphi + \sin 3\varphi + \dots + \sin n\varphi &= \frac{\sin\left(\frac{n\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{(n+1)\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}, \\ \cos \varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \dots + \cos n\varphi &= \frac{\sin\left(\frac{n\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{(n+1)\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Решение.

$$\begin{aligned} \text{а) } \sin \varphi &= \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \Rightarrow \sin^3 \varphi = \frac{1}{8i^3} (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})^3 = \\ &= \frac{1}{-8i} (e^{3i\varphi} - 3e^{2i\varphi}e^{-i\varphi} + 3e^{-2i\varphi}e^{i\varphi} - e^{-3i\varphi}) = \frac{1}{-8i} (e^{3i\varphi} - e^{-3i\varphi}) + \end{aligned}$$

$$+ \frac{3}{8i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) = \frac{3}{4} \left(\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{e^{3i\varphi} - e^{-3i\varphi}}{2i} \right) = \frac{1}{4} (3\sin \varphi - \sin 3\varphi).$$

$$\text{б) } \cos 4\varphi = \operatorname{Re}(\cos 4\varphi + i \sin 4\varphi) = \operatorname{Re}\{(\cos \varphi + i \sin \varphi)^4\} =$$

||применим бином Ньютона||

$$= \operatorname{Re}\{\cos^4 \varphi + 4 \cos^3 \varphi (i \sin \varphi) + 6 \cos^2 \varphi (i \sin \varphi)^2 + 4 \cos \varphi (i \sin \varphi)^3 + (i \sin \varphi)^4\} \Rightarrow$$

$$\cos 4\varphi = \cos^4 \varphi - 6 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + \sin^4 \varphi.$$

$$\text{в) Пусть } \alpha = e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \Rightarrow$$

$$S_n = \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \dots + \alpha^n = \left\| \begin{array}{l} \text{геометрическая} \\ \text{прогрессия} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} b_1 = \alpha \\ q = \alpha \end{array} \quad S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} \left\| = \frac{\alpha(\alpha^n - 1)}{\alpha - 1} =$$

$$= \frac{e^{i\varphi}(e^{in\varphi} - 1)}{e^{i\varphi} - 1} = \frac{e^{i\varphi} e^{in\varphi/2} (e^{in\varphi/2} - e^{-in\varphi/2})}{e^{i\varphi/2} (e^{i\varphi/2} - e^{-i\varphi/2})} = \frac{\sin(n\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)} \exp \left\{ i \frac{(n+1)\varphi}{2} \right\}.$$

Таким образом, имеем

$$e^{i\varphi} + e^{2\varphi i} + e^{3\varphi i} + \dots + e^{n\varphi i} = \frac{\sin(n\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)} \exp \left\{ i \frac{(n+1)\varphi}{2} \right\} = S_n \Rightarrow$$

$$\sin \varphi + \sin 2\varphi + \sin 3\varphi + \dots + \sin n\varphi = \operatorname{Im} S_n = \frac{\sin \left(\frac{n\varphi}{2} \right) \sin \left(\frac{(n+1)\varphi}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\varphi}{2} \right)},$$

$$\cos \varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \dots + \cos n\varphi = \operatorname{Re} S_n = \frac{\sin \left(\frac{n\varphi}{2} \right) \cos \left(\frac{(n+1)\varphi}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\varphi}{2} \right)}.$$

Задача 7

Вычислить

$$\text{а) } \sqrt[5]{z}, \quad z = -32; \quad \text{б) } \sqrt[4]{z}, \quad z = -32 - i 32\sqrt{3}.$$

Решение.

а) Представим число z в показательной и тригонометрической форме.

$$z = -32 \Rightarrow |z| = 32 = 2^5, \quad \arg z = \pi \Rightarrow z = 2^5 e^{i\pi} = 2^5 (\cos \pi + i \sin \pi).$$

Применим формулу для корней из комплексного числа

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot \exp \left\{ i \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right\} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right),$$

$$k \in \overline{0, n-1}, r = |z|, \varphi = \arg z.$$

Далее последовательно подставляем в формулу $k = 0, 1, 2, \dots, 4$.

Получаем все пять корней:

$$\sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{32} \cdot \exp \left\{ i \frac{\pi + 2\pi k}{5} \right\} = \sqrt[5]{32} \left(\cos \frac{\pi + 2\pi k}{5} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{5} \right)$$

$$z_1 = 2 \exp \left\{ i \frac{\pi}{5} \right\} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} \right),$$

$$z_2 = 2 \exp \left\{ i \frac{3\pi}{5} \right\} = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{5} + i \sin \frac{3\pi}{5} \right),$$

$$z_3 = 2 \exp \left\{ i \frac{5\pi}{5} \right\} = 2 (\cos \pi + i \sin \pi) = -2, \quad z_4 =$$

$$2 \exp \left\{ i \frac{7\pi}{5} \right\} = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{5} + i \sin \frac{7\pi}{5} \right),$$

$$z_5 = 2 \exp \left\{ i \frac{9\pi}{5} \right\} = 2 \left(\cos \frac{9\pi}{5} + i \sin \frac{9\pi}{5} \right).$$

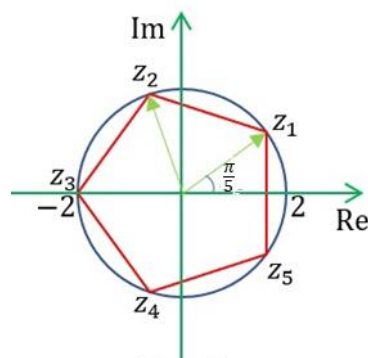


Рис. 3.

Заметим, извлекая корень над вещественным полем, мы получим одно значение корня, $\sqrt[5]{-32} = -2$, которое среди полученных пяти корней, конечно же, есть, но все остальные корни являются сугубо комплексными числами.

Корни изображены на Рис. 3. На этом рисунке видно, что все корни делят окружность радиуса $R = \sqrt[5]{r} = 2$ на пять равных частей, тем самым являются вершинами правильного пятиугольника, вписанного в данную окружность.

Первый корень z_1 имеет аргумент (угол), равный $\varphi_1 = \arg z_1 = \frac{\arg z}{n} = \frac{\varphi}{n} = \frac{\pi}{5}$. Углы, соответствующие остальным корням, получаются последовательным прибавлением к этому углу приращения $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{5}$.

б) Представим число z в показательной и тригонометрической форме.

$$z = 32(-1 - i\sqrt{3}) \in \text{III} \Rightarrow |z| = 32 \cdot \sqrt{1+3} = 64 = 2^6, \arg z = \pi + \arctg \left| \frac{-\sqrt{3}}{-1} \right| = \frac{4\pi}{3} \\ \Rightarrow z = 2^6 e^{i\frac{4\pi}{3}} = 2^6 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right).$$

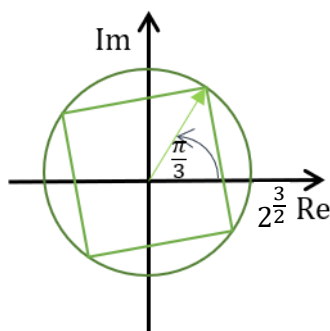


Рис. 4

Формула корней в данном случае примет вид:

$$\sqrt[4]{-32 - i 32\sqrt{3}} = \sqrt[4]{2^6} \cdot \exp \left\{ i \frac{4\pi/3 + 2\pi k}{4} \right\} = \\ \sqrt[4]{2^6} \left(\cos \frac{4\pi/3 + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{4\pi/3 + 2\pi k}{n} \right), k \in \overline{0,3}.$$

Далее можно последовательно подставить в формулу $k = 0, 1, 2, 3$. И тем самым получить ровно четыре корня из заданного комплексного числа.

Но применим свойства этих корней, отмеченные выше:

$$r = 2^6 \Rightarrow R = \sqrt[4]{r} = 2^{\frac{6}{4}} = 2^{\frac{3}{2}}; \arg z = \varphi = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow \\ \varphi_1 = \frac{\varphi}{n} = \frac{4\pi}{3 \cdot 4} = \frac{\pi}{3}, \Delta\varphi = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Выпишем аргументы (углы) всех четырёх корней, а по ним выпишем все корни – см. Рис. 4.

$$\varphi_1 = \arg z_1 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow z_1 = 2^{\frac{3}{2}} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \sqrt{2}(1 + i\sqrt{3}).$$

$$\varphi_2 = \arg z_2 = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow z_2 = 2^{\frac{3}{2}} \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = -\sqrt{2}(\sqrt{3} - i).$$

$$\varphi_3 = \arg z_3 = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow z_3 = 2^{\frac{3}{2}} \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = -\sqrt{2}(1 + i\sqrt{3}).$$

$$\varphi_4 = \arg z_4 = \frac{11\pi}{6} \Rightarrow z_4 = 2^{\frac{3}{2}} \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right) = \sqrt{2}(\sqrt{3} - i).$$

Задача 8

Решить уравнение

$$\text{а) } z^2 + (5 - 2i)z + 5(1 - i) = 0; \quad \text{б) } z^2 + (2i - 3)z + 5 - i = 0.$$

Решение.

а) Уравнение квадратное. Посчитаем дискриминант, потом применим формулу корней квадратного уравнения:

$$D = (5 - 2i)^2 - 4 \cdot 5(1 - i) = 25 - 20i + 4i^2 - 20 + 20i = 1.$$

$$D = 1 = e^{0i} \Rightarrow \sqrt{D} = \begin{bmatrix} 1 \cdot e^{0i} = 1, \\ 1 \cdot e^{\pi i} = -1 \end{bmatrix} \Rightarrow z_{1,2} = \frac{-(5 - 2i) \pm 1}{2} = \begin{bmatrix} -2 + i, \\ -3 + i. \end{bmatrix}$$

б) Аналогично,

$$D = (-3 + 2i)^2 - 4 \cdot (5 - i) = 9 - 12i + 4i^2 - 20 + 4i = -15 - 8i.$$

В отличие от предыдущего пункта, дискриминант является сугубо комплексным числом, поэтому извлечение корня из него запишем подробнее.

$$D = (-15 - 8i) \in \text{III} \Rightarrow |D| = \sqrt{225 + 64} = 17, \arg D = \pi + \operatorname{arctg} \left| \frac{-8}{-15} \right| = \pi + \alpha,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{15}, \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Корней из дискриминанта всего два: $\sqrt{D} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$, следовательно, они делят окружность пополам, а это означает, что $d_1 = -d_2$. Найдём d_1 .

$$\arg d_1 = \frac{\arg D}{2} = \frac{\pi + \alpha}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2} \Rightarrow d_1 = \sqrt{17} \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2} \right) \right) = \\ = \sqrt{17} \left(-\sin \frac{\alpha}{2} + i \cos \frac{\alpha}{2} \right).$$

Находим синус и косинус половинного угла, зная тангенс угла:

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{15} \\ \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \cos \alpha = + \sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}} = \frac{15}{17} \Rightarrow \cos \frac{\alpha}{2} = + \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{17}}.$$

Тогда

$$d_1 = \sqrt{17} \left(-\sin \frac{\alpha}{2} + i \cos \frac{\alpha}{2} \right) = \sqrt{17} \left(-\frac{1}{\sqrt{17}} + i \frac{4}{\sqrt{17}} \right) = -1 + 4i \Rightarrow d_2 = -d_1 = 1 - 4i.$$

Таким образом,

$$z_{1,2} = \frac{-(5 - 2i) \pm (-1 + 4i)}{2} = \begin{bmatrix} 1 + i, \\ 2 - 3i. \end{bmatrix}$$

Задача 9

Найти

а) сумму квадратов корней уравнения $z^6 + 64 = 0$;

б) сумму $\sum_k z_k^{-1}$ для корней уравнения $z^8 + 1 = 0$, лежащих в верхней координатной полуплоскости.

Решение.

а) Поскольку коэффициенты уравнения вещественные, а уравнение не имеет вещественных корней, следовательно, все шесть корней уравнения сугубо комплексные, а значит, попарно сопряжённые. Поэтому достаточно найти сумму квадратов первых трёх корней, а потом результат удвоить.

$$\arg(-64) = \pi, \quad |-64| = 64 = 2^6 \Rightarrow \sqrt[6]{-64} = 2 \exp \left\{ i \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} k \right) \right\}, \quad k \in \overline{0,5} \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^6 z_n^2 = 2 \sum_{n=1}^3 z_n^2 = 2 \cdot 4 \left(\exp \left\{ i \left(2 \cdot \frac{\pi}{6} \right) \right\} + \exp \left\{ i \left(2 \cdot \frac{\pi}{2} \right) \right\} + \exp \left\{ i \left(2 \cdot \frac{5\pi}{6} \right) \right\} \right) = \\ = 8 \left(\exp \left\{ i \left(\frac{\pi}{3} \right) \right\} - 1 + \exp \left\{ i \left(\frac{5\pi}{3} \right) \right\} \right) = 8 \left(2 \cos \frac{\pi}{3} - 1 \right) = 0.$$

Получили, что сумма квадратов ненулевых элементов равна нулю. Этот результат над вещественным полем, как мы знаем, невозможен. Остаётся заметить, что и сумма всех

корней этого уравнения равна нулю, поскольку корни этого уравнения не только попарно сопряжённые, но и попарно противоположные.

б) Аналогично, все восемь корней уравнения сугубо комплексные, а значит, попарно сопряжённые, т. е. симметричны относительно вещественной оси комплексной плоскости. Поэтому в верхнюю полуплоскость попадают первые четыре корня.

$$\arg(-1) = \pi, \quad |-1| = 1 \Rightarrow \sqrt[8]{-1} = 1 \cdot \exp\left\{i\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}k\right)\right\}, \quad k \in \overline{0,7} \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^4 z_n^{-1} = \exp\left\{i\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right\} + \exp\left\{i\left(-\frac{3\pi}{8}\right)\right\} + \exp\left\{i\left(-\frac{5\pi}{8}\right)\right\} + \exp\left\{i\left(-\frac{7\pi}{8}\right)\right\} =$$

$$\parallel \exp\{i(\varphi \pm \pi)\} = -\exp\{i\varphi\} \parallel$$

$$= \left(\exp\left\{i\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right\} - \exp\left\{i\left(\frac{\pi}{8}\right)\right\}\right) + \left(\exp\left\{i\left(-\frac{3\pi}{8}\right)\right\} - \exp\left\{i\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right\}\right) =$$

$$= 2i\left(-\sin\frac{\pi}{8} - \sin\frac{3\pi}{8}\right) = -4i\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8} = -2i\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos\frac{\pi}{4}}{2}} = -i\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}.$$

Задача 10

Изобразите множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих заданным условиям:

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{4} \leq \arg z < \frac{2\pi}{3}, \\ |z - i| < 2, \\ -\frac{1}{2} < \operatorname{Im} z \leq 2. \end{cases}$$

Решение.

Первое неравенство задаёт часть комплексной плоскости, удовлетворяющей условию

$\varphi = \frac{2\pi}{3}$, причём, первый луч включается в заданное множество сплошной линией, а второй – не включается.

Второе неравенство задаёт круг радиуса $R=2$ с центром в точке $O^*(0;1)$, не включая границу круга – окружность.

Последнее неравенство – есть горизонтальная полоса, ограниченная

прямыми $\operatorname{Im} z = -\frac{1}{2}$ и $\operatorname{Im} z = 2$, не включая первую прямую, но включая вторую.

Результат – см. Рис. 5.

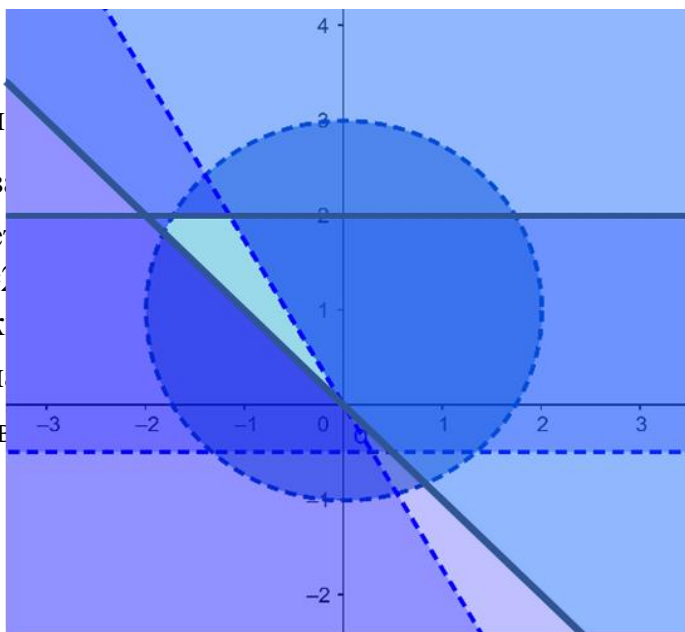


Рис. 5.

Разработал старший преподаватель кафедры высшей математики Н. В. Петрова.