

Раздел № 03 Комплексные числа и

многочлены

Тема № 02 Многочлены и рациональные дроби

Практическое занятие № 12

Учебные вопросы:

1. Деление многочленов. Схема Горнера.
2. Корни многочленов. Разложение на неприводимые множители над полем комплексных и вещественных чисел.
3. Рациональные дроби. Разложение рациональной дроби на простейшие.

Литература

1. Сборник задач по математике в четырех частях.
Под общей редакцией А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича.
2. Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики.
3. А.Е. Умнов. Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

Решение задач

Задача 1

Записать рациональную дробь $\frac{z^4 + 5z^3 - 2z - 7}{z + 3}$ как сумму целой части и правильной рациональной дроби.

Деление многочленов выполнить двумя способами – «уголком» и по схеме Горнера.

Решение.

Разделим многочлен $z^4 + 5z^3 - 2z - 7$ на многочлен $z + 3$ «уголком» (Рис. 1.)

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 z^4 + 5z^3 - 2z - 7 \\
 - (z^4 + 3z^3) \\
 \hline
 2z^3 - 2z - 7 \\
 - (2z^3 + 6z^2) \\
 \hline
 -6z^2 - 2z - 7 \\
 - (-6z^2 - 18z) \\
 \hline
 16z - 7 \\
 - (16z + 48) \\
 \hline
 -55
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 z + 3 \\
 \hline
 z^3 + 2z^2 - 6z + 16
 \end{array}$$

Рис. 1.

В результате деления имеем:

$$z^4 + 5z^3 - 2z - 7 = (z + 3)(z^3 + 2z^2 - 6z + 16) - 55,$$

$$\frac{z^4 + 5z^3 - 2z - 7}{z + 3} = z^3 + 2z^2 - 6z + 16 - \frac{55}{z + 3}.$$

Выполним деление многочленов по схеме Горнера:

	1	5	0	-2	-7
-3	1	2	-6	16	-55

В первой строке – коэффициенты делимого a_k , во второй строке – коэффициенты частного b_k , которые вычисляются по формуле $b_k = a_k + cb_{k-1}$, где $c = -3$, $b_0 = a_0$.

При этом последний коэффициент b_k во второй строке равен нулю, если число $z = c$ является корнем делимого. В противном случае этот коэффициент не ноль и является остатком от деления.

По теореме Безу остаток от деления многочлена $P(z)$ на линейный многочлен $(z - c)$ равен $P(c)$. Проверим это в задаче 1:

$$P(z) = z^4 + 5z^3 - 2z - 7 \Rightarrow P(-3) = (-3)^4 + 5(-3)^3 - 2(-3) - 7 = 81 - 135 + 6 - 7 = -55.$$

Задача 2

Решить уравнение

а) $z^2 + 2z + 5 = 0$; **б)** $z^8 + 15z^4 - 16 = 0$.

Решение.

а) Применим формулу корней квадратного уравнения и формулу корней из комплексного числа.

$$D = 2^2 - 4 \cdot 5 = -16 = 16e^{\pi i} \Rightarrow \sqrt{D} = \begin{cases} 4e^{\frac{\pi i}{2}} = 4i, \\ 4e^{\frac{3\pi i}{2}} = -4i \end{cases} \Rightarrow z_{1,2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = \begin{cases} -1 + 2i, \\ -1 - 2i. \end{cases}$$

Важное замечание.

Коэффициенты квадратного трёхчлена вещественные, при этом вещественных корней

у него нет. Поэтому два его сугубо комплексных корня обязательно должны быть комплексно-сопряжёнными, – как у нас и получилось. Эти корни обычно и записывают сопряжённой парой как $z_{1,2} = -1 \pm 2i$.

б) Уравнение биквадратное. Поэтому решаем его как квадратное, но относительно z^4 .

$$(z^4)_{1,2} = \frac{-15 \pm 17}{2} = \begin{cases} -16, \\ +1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z^4 = -16, \\ z^4 = 1. \end{cases}$$

Далее извлекаем корни по формуле корней из комплексного числа.

$$1) z^4 = -16 = 16e^{\pi i} \Rightarrow R = \sqrt[4]{16} = 2, \varphi_1 = \frac{\arg z}{n} = \frac{\pi}{4}, \Delta\varphi = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$z_1 = 2e^{\frac{\pi i}{4}} = \sqrt{2}(1 + i), \quad z_2 = 2e^{\frac{3\pi i}{4}} = \sqrt{2}(-1 + i), \quad z_3 = 2e^{\frac{5\pi i}{4}} = \sqrt{2}(-1 - i),$$

$$z_4 = 2e^{\frac{7\pi i}{4}} = \sqrt{2}(1 - i).$$

$$2) z^4 = 1 = 1e^{0i} \Rightarrow R = \sqrt[4]{1} = 1, \varphi_5 = \frac{\arg z}{n} = 0, \Delta\varphi = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$z_5 = 1e^{0i} = 1, \quad z_6 = 1e^{\frac{\pi i}{2}} = i, \quad z_7 = 1e^{\pi i} = -1, \quad z_8 = 1e^{\frac{3\pi i}{2}} = -i.$$

Как и в предыдущем пункте, все комплексные корни попарно сопряжённые, потому что коэффициенты многочлена сугубо вещественные. Запишем корни парами:

$$z_{1,4} = \sqrt{2}(1 \pm i), \quad z_{2,3} = \sqrt{2}(-1 \pm i), \quad z_{6,8} = \pm i, \quad z_{5,7} = \pm 1.$$

Задача 3

Разложить многочлен на неприводимые множители над комплексным и над вещественным полем

а) $z^4 + 1$; **б)** $z^8 + 15z^4 - 16$.

Решение.

а) Находим все корни из комплексного числа:

$$z^4 = -1 = 1e^{\pi i} \Rightarrow R = \sqrt[4]{1} = 1, \varphi_1 = \frac{\arg z}{n} = \frac{\pi}{4}, \Delta\varphi = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$z_{1,4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm i), \quad z_{2,3} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 \pm i).$$

Следовательно, над комплексным полем разложение принимает вид

$$\begin{aligned} z^4 + 1 &= \left(z - \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)\right) \left(z - \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i)\right) \left(z - \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 + i)\right) \left(z - \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 - i)\right) = \\ &= \left(z - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) \left(z - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) \left(z + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) \left(z + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \left(z - \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{i}{\sqrt{2}}\right) \left(z + \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{i}{\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

Для разложения над вещественным полем воспользуемся теоремой Виета и составим квадратный трёхчлен по каждой сопряженной паре корней.

$$1) z_{1,4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm i) \Rightarrow z_1 + z_4 = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}, \quad z_1 \cdot z_4 = z_1 \overline{z_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1 \Rightarrow z^2 - \sqrt{2}z + 1.$$

$$2) z_{2,3} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 \pm i) \Rightarrow z_2 + z_3 = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}, \quad z_2 \cdot z_3 = z_2 \overline{z_3} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1 \Rightarrow z^2 + \sqrt{2}z + 1.$$

Следовательно, над вещественным полем разложение принимает вид

$$z^4 + 1 = (z^2 - \sqrt{2}z + 1)(z^2 + \sqrt{2}z + 1).$$

Для разложения над вещественным полем многочлена $z^4 + 1$ есть и такой способ:

$$\begin{aligned} z^4 + 1 &= z^4 + 1 \pm 2z^2 = (z^4 + 2z^2 + 1) - 2z^2 = (z^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}z)^2 = \\ &= (z^2 + 1 - \sqrt{2}z)(z^2 + 1 + \sqrt{2}z) = (z^2 \pm \sqrt{2}z + 1). \end{aligned}$$

Но этот способ не является универсальным, в отличие от рассмотренного выше.

б) Для многочлена $z^8 + 15z^4 - 16$ корни найдены в задаче 2:

$$z_{1,4} = \sqrt{2}(1 \pm i), \quad z_{2,3} = \sqrt{2}(-1 \pm i), \quad z_{6,8} = \pm i, \quad z_{5,7} = \pm 1.$$

Поэтому напомним сразу разложения.

Над комплексным полем:

$$z^8 + 15z^4 - 16 = (z - \sqrt{2} \pm \sqrt{2}i)(z + \sqrt{2} \pm \sqrt{2}i)(z \pm i)(z \pm 1).$$

Для разложения над вещественным полем воспользуемся теоремой Виета и составим квадратный трёхчлен по каждой сопряженной паре корней.

$$z_{1,4} = \sqrt{2}(1 \pm i) \Rightarrow z_1 + z_4 = 2\sqrt{2}, \quad z_1 z_4 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 4 \Rightarrow z^2 - 2\sqrt{2}z + 4.$$

$$z_{2,3} = \sqrt{2}(-1 \pm i) \Rightarrow z_2 + z_3 = -2\sqrt{2}, \quad z_2 z_3 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 4 \Rightarrow z^2 + 2\sqrt{2}z + 4.$$

$$z_{6,8} = \pm i \Rightarrow z_6 + z_8 = 0, \quad z_6 z_8 = 0^2 + 1^2 = 1 \Rightarrow z^2 + 1.$$

Следовательно, над вещественным полем разложение имеет вид

$$z^8 + 15z^4 - 16 = (z^2 - 2\sqrt{2}z + 4)(z^2 + 2\sqrt{2}z + 4)(z^2 + 1)(z - 1)(z + 1) = \\ = (z^2 \pm 2\sqrt{2}z + 4)(z^2 \pm 1).$$

Задача 4

Составить многочлен $P(z)$ наименьшей степени с вещественными коэффициентами, если известны некоторые его корни:

а) $z_1 = 1$, $z_2 = 2i$ – двукратный корень;

б) $z_1 = 0$, $z_2 = 3 - i$ – двукратный корень, $z_3 = -1$ – двукратный корень.

Решение.

а) $z_1 = 1$, $z_2 = 2i$ – двукратный корень $\Rightarrow \exists \overline{z_2} = -2i$ – двукратный корень $\Rightarrow$
 $P(z) = (z - 1)(z - 2i)^2(z + 2i)^2 = (z - 1)(z^2 + 4)^2 = (z - 1)(z^4 + 8z^2 + 16) \Rightarrow$
 $P(z) = z^5 - z^4 + 8z^3 - 8z^2 + 16z - 16.$

б) $z_2 = 3 - i$ – двукратный корень $\Rightarrow \exists \overline{z_2} = 3 + i$ – двукратный корень $\Rightarrow$
в разложении многочлена $P(z)$ есть множитель $(z^2 - 6z + 10)^2$.

Следовательно, $P(z) = (z - 0)(z^2 - 6z + 10)^2(z + 1)^2$.

Выполняем алгебраические преобразования, получаем ответ:

$$P(z) = z^7 - 10z^6 + 33z^5 - 20z^4 - 84z^3 + 80z^2 + 100z.$$

Задача 5

Определить, при каком значении m рациональную функцию можно разложить на простейшие дроби. Написать вид этого разложения над вещественным полем, не находя неопределённые коэффициенты этого разложения.

$$\frac{P_m(x)}{(x^3 + 2x^2)^2(x^3 - 1)(x^2 + 5)^3(x^2 - 3x + 4)^2}.$$

Решение.

На простейшие дроби можно разлагать только правильную дробь, т. е. ту, у которой степень числителя строго меньше степени знаменателя. Поэтому разложение данной рациональной дроби возможно, если $m < 6 + 3 + 6 + 4 = 19$.

Далее разлагаем знаменатель на неприводимые над полем $\mathbb{R}$ множители:

$$\frac{P_m(x)}{(x^3 + 2x^2)^2(x^3 - 1)(x^2 + 5)^3(x^2 - 3x + 4)^2} = \frac{P_m(x)}{x^4(x + 2)^2(x - 1)(x^2 + x + 1)(x^2 + 5)^3(x^2 - 3x + 4)^2}.$$

Вещественный корень $x = 0$ кратности 4 порождает в разложении 4 (четыре) слагаемых – одну дробь I типа и три дроби II типа.

$x = -2$ кратности 2 $\Rightarrow$ два слагаемых – одна дробь I типа и одна дробь II.

$x = 1$ кратности $1 \Rightarrow$ одна дробь I типа.

$(x^2 + x + 1)^1 \Rightarrow D = 1 - 4 = -3 < 0 \Rightarrow$ одна дробь III типа.

$(x^2 + 5)^3 \Rightarrow D = 0 - 20 = -20 < 0 \Rightarrow$ одна дробь III типа и две дроби IV типа.

$(x^2 - 3x + 4)^2 \Rightarrow D = 9 - 16 = -7 < 0 \Rightarrow$ одна дробь III типа и одна дробь IV типа.

Таким образом, разложение будет таким:

$$\frac{P_m(x)}{x^4(x+2)^2(x-1)(x^2+x+1)(x^2+5)^3(x^2-3x+4)^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \frac{A_4}{x^4} + \frac{B_1}{x+2} + \frac{B_2}{(x+2)^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{Ex+F}{x^2+x+1} + \frac{G_1x+H_1}{x^2+5} + \frac{G_2x+H_2}{(x^2+5)^2} + \frac{G_3x+H_3}{(x^2+5)^3} + \frac{K_1x+L_1}{x^2-3x+4} + \frac{K_2x+L_2}{(x^2-3x+4)^2}.$$

Задача 6

Разложить на простейшие дроби над вещественным полем

а) $\frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x}$; б) $\frac{7x^3 + 53x^2 + 122x - 58}{x^4 - x^3 - 35x^2 + 24x + 336}$; в) $\frac{6x^3 - 18x^2 + 14x - 17}{(x^2 + 3)(x^2 - 2x + 2)}$.

Решение.

а) Дробь $\frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x}$ неправильная. Поэтому сначала надо поделить уголком, выделив

целую часть и правильную рациональную дробь. После чего правильную дробь разлагаем на простейшие.

(Деление выполните самостоятельно).

Получаем

$$\frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} = x^2 + x + 4 + \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x} = x^2 + x + 4 + \frac{4x^2 + 16x - 8}{x(x-2)(x+2)}.$$

$$\frac{4x^2 + 16x - 8}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}.$$

Чтобы найти значения неопределённых коэффициентов разложения, складываем дроби справа и приравниваем числители дробей, поскольку знаменатели совпадают.

Получается равенство многочленов:

$$4x^2 + 16x - 8 = A(x-2)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-2).$$

Первый (универсальный) способ нахождения коэффициентов основан на равенстве многочленов, а именно, на равенстве коэффициентов при одинаковых степенях.

Если разложение с неопределёнными коэффициентами написано правильно, из равенства многочленов получается определённая система линейных алгебраических уравнений для этих коэффициентов, т. е. система, которая имеет единственное решение.

Решать её можно любым известным способом. Если неизвестных достаточно много, наилучший способ – метод Гаусса. Метод Крамера для таких систем тоже применим, поскольку основная матрица системы получается обязательно квадратная и невырожденная. Подробно решение системы здесь записывать не будем.

Итак,

$$\begin{aligned} \text{при } x^2: & \begin{cases} A + B + C = 4, \\ \text{при } x^1: & \begin{cases} 2B - 2C = 16, \\ \text{при } x^0: & \begin{cases} -4A = -8. \end{cases} \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2, \\ B = 5, \\ C = -3. \end{cases} \end{aligned}$$

Следовательно, окончательно получаем

$$\frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} = x^2 + x + 4 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x-2} - \frac{3}{x+2}.$$

Второй способ – метод частных значений, применяется в случае, если в знаменателе есть вещественные корни. Тогда в равенство многочленов переменной присваиваются значения вещественных корней. В результате процесс нахождения неопределённых коэффициентов упрощается.

В нашем примере: $4x^2 + 16x - 8 = A(x-2)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-2)$.

$$x := 0 \Rightarrow -8 = A(-2) \cdot 2 \Rightarrow A = 2,$$

$$x := 2 \Rightarrow 16 + 32 - 8 = B \cdot 2 \cdot 4 \Rightarrow B = 5,$$

$$x := -2 \Rightarrow 16 - 32 - 8 = C(-2)(-4) \Rightarrow C = -3.$$

б) Дробь $\frac{7x^3 + 53x^2 + 122x - 58}{x^4 - x^3 - 35x^2 + 24x + 336}$ правильная. Надо разложить знаменатель на неприводимые над полем $\mathbb{R}$ множители. Многочлен в знаменателе имеет старший коэффициент «1», поэтому подбираем корень многочлена, проверяя целые делители свободного члена.

$Q_4(x) = x^4 - x^3 - 35x^2 + 24x + 336 \Rightarrow \pm 1 \vee \pm 2 \vee \pm 3 \vee \pm 4 \vee \pm 6$.

$$Q_4(x) = x^4 - x^3 - 35x^2 + 24x + 336 \Rightarrow \pm 1 \vee \pm 2 \vee \pm 3 \vee \pm 4 \vee \pm 6.$$

Методом перебора находим:

$$Q_4(-4) = 256 + 64 - 560 - 96 + 336 = 0 \Leftrightarrow x = -4 - \text{корень } Q_4(x).$$

Делим уголком или по схеме Горнера знаменатель на $(x+4)$.

$$Q_4(x) = (x+4)(x^3 - 5x^2 - 15x + 84).$$

Подбираем корень для многочлена $R_3(x) = x^3 - 5x^2 - 15x + 84$.

$$\text{Получаем } R_3(-4) = -64 - 80 + 60 + 84 = 0 \Leftrightarrow x = -4 - \text{корень } R_3(x).$$

Делим уголком или по схеме Горнера многочлен $R_3(x)$ на $(x+4)$.

$$R_3(x) = (x+4)(x^2 - 9x + 21) \Rightarrow$$

$$Q_4(x) = x^4 - x^3 - 35x^2 + 24x + 336 = (x+4)^2(x^2 - 9x + 21); \quad x = -4 \in R \quad (\text{кр.2}), \quad D = -3 < 0.$$

Разложение знаменателя над вещественным полем завершено. Следовательно,

$$\frac{7x^3 + 53x^2 + 122x - 58}{x^4 - x^3 - 35x^2 + 24x + 336} = \frac{7x^3 + 53x^2 + 122x - 58}{(x+4)^2(x^2 - 9x + 21)} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{(x+4)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 - 9x + 21}.$$

Для нахождения коэффициентов разложения разумно применять комбинацию методов, показанных выше.

Поскольку в знаменателе есть один вещественный корень, нахождение неопределённых коэффициентов начинаем с метода частных значений.

$$7x^3 + 53x^2 + 122x - 58 = A(x+4)(x^2 - 9x + 21) + B(x^2 - 9x + 21) + (x+4)^2(Cx + D)$$

$$x := -4 \Rightarrow -146 = 73B \Rightarrow B = -2$$

$$\begin{aligned} \text{при } x^3: \quad 7 &= A + C \\ \text{при } x^2: \quad 53 &= -5A + B + 8C + D \\ \text{при } x^0: \quad -58 &= 84A + 21B + 16D \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = -2 \\ C = 7 \\ D = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{7x^3 + 53x^2 + 122x - 58}{x^4 - x^3 - 35x^2 + 24x + 336} = \frac{7x^3 + 53x^2 + 122x - 58}{(x+4)^2(x^2 - 9x + 21)} = \frac{-2}{(x+4)^2} + \frac{7x-1}{x^2 - 9x + 21}.$$

в) Дробь $\frac{6x^3 - 18x^2 + 14x - 17}{(x^2 + 3)(x^2 - 2x + 2)}$ правильная.

$Q_4(x) = (x^2 + 3)(x^2 - 2x + 2); \quad D_1 = 0 - 12 = -12 < 0, \quad D_2 = 4 - 8 = -4 < 0 \Rightarrow$ разложение над вещественным полем завершено, в разложении данной рациональной функции на простейшие дроби будет только две простейшие III типа.

Вещественных корней в знаменателе нет. Все неопределённые константы разложения найдём универсальным методом – методом сравнения коэффициентов при соответствующих степенях в равенстве многочленов.

$$\frac{6x^3 - 18x^2 + 14x - 17}{(x^2 + 3)(x^2 - 2x + 2)} = \frac{ax + b}{x^2 + 3} + \frac{cx + d}{x^2 - 2x + 2} \Rightarrow$$

$$6x^3 - 18x^2 + 14x - 17 = (ax + b)(x^2 - 2x + 2) + (cx + d)(x^2 + 3) \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} \text{при } x^3: \\ \text{при } x^2: \\ \text{при } x^1: \\ \text{при } x^0: \end{array} \left\{ \begin{array}{l} a + c = 6 \\ b - 2a + d = -18 \\ -2b + 2a + 3c = 14 \\ 2b + 3d = -17 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 6 \\ b = -1 \\ c = 0 \\ d = -5 \end{array} \right. \Rightarrow \frac{6x^3 - 18x^2 + 14x - 17}{(x^2 + 3)(x^2 - 2x + 2)} = \frac{6x - 1}{x^2 + 3} - \frac{5}{x^2 - 2x + 2}.$$

Разработал старший преподаватель кафедры высшей математики Н. В. Петрова.