ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Раздел № 04 Начала математического анализа

Тема № 01 Предел числовой последовательности

Практическое занятие № 13

Учебные вопросы:

1. Определение предела числовой последовательности.
2. Основные методы вычисления пределов числовых последовательностей.

Литература

1. Сборник задач по математике в четырех частях. Под общей редакцией А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича.
2. Б.П. Демидович. Краткий курс высшей математики.
3. Л.Д. Кудрявцев. Курс математического анализа.
4. Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин. Сборник задач по математическому анализу. Т. 1-3.

Решение задач

Задача 1 Доказать по определению

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+2}{4n^2-1}=\dfrac{3}{4}$; **б)** $\lim\limits_{n\to\infty}5^n=+\infty.$

Решение.

а) Запишем определение:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2}{4n^2-1}=\frac{3}{4}\overset{def}{\Leftrightarrow}\ \forall\varepsilon>0\quad \exists N(\varepsilon)\in\mathrm{N}\ :\ \forall n>N(\varepsilon)\qquad\Rightarrow\qquad \left|\frac{3n^2+2}{4n^2-1}-\frac{3}{4}\right|<\varepsilon.$$

Возьмем произвольное число $\varepsilon>0$ и найдем номер $N(\varepsilon)$, начиная с которого будет выполнено последнее неравенство.

Решаем это неравенство относительно натурального числа n:

$$\left|\frac{3n^2+2}{4n^2-1}-\frac{3}{4}\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\left|\frac{11}{4(4n^2-1)}\right|<\varepsilon\Leftrightarrow n>\sqrt{\frac{11+4\varepsilon}{16\varepsilon}}\ .$$

В качестве $N(\varepsilon)$ достаточно взять целую часть числа $\sqrt{\dfrac{11+4\varepsilon}{16\varepsilon}}$, но поскольку при больших значениях ε у нас не получится натурального числа, то можно взять

$$N(\varepsilon)=\max\left\{1,\ \left[\sqrt{\frac{11+4\varepsilon}{16\varepsilon}}\right]\right\}.$$

б) $\lim\limits_{n\to\infty}5^n=+\infty\ \overset{def}{\Leftrightarrow}\ \forall M>0\quad \exists N(M)\in\mathrm{N}\ :\ \forall n>N(M)\qquad\Rightarrow\quad 5^n>M.$

$$5^n>M\Leftrightarrow n>\log_5 M\Rightarrow N(M)=\begin{cases}\max\{1,\ [\log_5 M]\},\ \ M\ge 1;\\ 1,\ \ M\in(0,1).\end{cases}$$

Далее во всех задачах необходимо **вычислить предел** указанной последовательности.

Задача 2

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3-5n+1}{5n^3+2n^2-7n+2}$; **б)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^3-(n-2)^3}{95-39n}$; **в)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^2-(2n-1)^2}{(n+5)^4-(n-1)^4}$.

Решение.

а) Вынесем за скобку старшую степень переменной в числителе и знаменателе:

$$2n^3-5n+1=n^3\cdot\left(2-\frac{5}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right),\qquad 5n^3+2n^2-7n+2=n^3\cdot\left(5+\frac{2}{5n}-\frac{7}{5n^2}+\frac{2}{5n^3}\right).$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3-5n+1}{5n^3+2n^2-7n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2-\frac{5}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)}{\left(5+\frac{2}{5n}-\frac{7}{5n^2}+\frac{2}{5n^3}\right)}=\frac{2-0+0}{5+0-0+0}=\frac{2}{5}.$$

Замечание.

Можно применять не вынесение за скобку, а сразу деление числителя и знаменателя на наибольшую для всей дроби степень переменной.

б) Поскольку в числителе старшая степень n^3 в каждой скобке имеет один и тот же коэффициент «1», эта степень сократится, следовательно, необходимо выполнить алгебраические действия. Используем формулу разность кубов $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

$$(n+2)^3-(n-2)^3=\big((n+2)-(n-2)\big)\cdot\big((n+2)^2+(n+2)(n-2)+(n-2)^2\big)=4\cdot\big(3n^2+4\big).$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^3-(n-2)^3}{95-39n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot\left(3n^2+4\right)}{95-39n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2\cdot\left(3+\frac{4}{n^2}\right)}{n\left(\frac{95}{n}-39\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n\cdot\left(3+\frac{4}{n^2}\right)}{\left(\frac{95}{n}-39\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{12n}{-39}=-\infty.$$

в) В числителе $(n+2)^2-(2n-1)^2=-3n^2+8n+3$.

В знаменателе используем дважды формулу разности квадратов:

$$(n+5)^4-(n-1)^4=\left((n+5)^2-(n-1)^2\right)\left((n+5)^2+(n-1)^2\right)=6(2n+4)(2n^2+8n+26)=24(n+2)(n^2+4n+13).$$

После чего делим числитель и знаменатель на n^3:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^2-(2n-1)^2}{(n+5)^4-(n-1)^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{-3n^2+8n+3}{24(n+2)(n^2+4n+13)}=\frac{1}{24}\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{3}{n}+\frac{8}{n^2}+\frac{3}{n^3}}{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{4}{n}+\frac{13}{n^2}\right)}=\frac{1}{24}\cdot\frac{0}{1}=0.$$

Задача 3

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{71n}-\sqrt[3]{64n^6+9n^2-1}}{(2n-\sqrt[3]{n})\sqrt{5n^2+3n+11}}$; **б)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+1}+\sqrt{25n^2+10n^4-1}}{(\sqrt[3]{n+1}+4)(\sqrt{n}+1)}$.

Решение.

Правило выбора старшей степени переменной применимо и для степеней с радикалами, т. е. не только с натуральными показателями степени, но и с рациональными. Необходимо выбирать старшую степень под радикалами.

а) В числителе:

$$n\sqrt{71n}-\sqrt[3]{64n^6+9n^2-1}=\left\|\frac{3}{2}<\frac{6}{3}=2\right\|=n^2\cdot\left(\frac{\sqrt{71}}{n^{1/2}}-\sqrt[3]{64+\frac{9}{n^4}-\frac{1}{n^6}}\right).$$

В знаменателе:

$$(2n-\sqrt[3]{n})\sqrt{5n^2+3n+11}=n\cdot\left(2-\frac{1}{n^{2/3}}\right)\cdot n\cdot\sqrt{5+\frac{3}{n}+\frac{11}{n^2}}=n^2\left(2-\frac{1}{n^{2/3}}\right)\sqrt{5+\frac{3}{n}+\frac{11}{n^2}}.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{71n}-\sqrt[3]{64n^4+9n^2-1}}{(2n-\sqrt[3]{n})\sqrt{5n^2+3n+11}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{\sqrt{71}}{n^{1/2}}-\sqrt[3]{64+\frac{9}{n^4}-\frac{1}{n^6}}\right)}{\left(2-\frac{1}{n^{2/3}}\right)\sqrt{5+\frac{3}{n}+\frac{11}{n^2}}}=-\frac{4}{2\sqrt{5}}=-\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

б) В числителе:

$$\frac{2}{3}<\frac{4}{2}\quad\Rightarrow\quad\sqrt[3]{n^2+1}+\sqrt{25n^2+10n^4-1}=n^2\left(\sqrt[3]{\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^6}}+\sqrt{\frac{25}{n^2}+10-\frac{1}{n^4}}\right).$$

В знаменателе:

$$(\sqrt[3]{n+1}+4)(\sqrt{n}+1)=\sqrt[3]{n}\cdot\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+\frac{4}{\sqrt[3]{n}}\right)\cdot\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=n^{5/6}\cdot\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+\frac{4}{\sqrt[3]{n}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(\sqrt[3]{\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^6}}+\sqrt{\frac{25}{n^2}+10-\frac{1}{n^4}}\right)}{n^{5/6}\cdot\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+\frac{4}{\sqrt[3]{n}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{7/6}(0+\sqrt{10})}{1}=+\infty.$$

Задача 4

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{2n+1}+3^n}{4^{n-1}-2^{n-1}}$; **б)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^{n-1}-7^{n-2}}{6^{n+1}+3^n}$; **в)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{3n+2}-36^{\frac{n}{2}-1}}{e^{2n-1}+7^{n+1}}$.

Решение.

а)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+1}+3^n}{4^{n-1}-2^{n-1}}=\left\|\frac{2\cdot(2^2)^n+3^n}{4^{-1}\cdot 4^n-2^{-1}\cdot 2^n}=\frac{4^n\cdot\left[2+\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]}{4^n\cdot\left[4^{-1}-2^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}\right\|=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n(2+0)}{4^n(4^{-1}+0)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{4^{-1}}=8.$$

б)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n-1}-7^{n-2}}{6^{n+1}+3^n}=\left\|\frac{5^{-1}\cdot 5^n-7^{-2}\cdot 7^n}{6\cdot 6^n+3^n}=\frac{7^n\cdot\left[5^{-1}\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^n-7^{-2}\right]}{6^n\cdot\left[6+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}\right\|=\lim_{n\to\infty}\frac{-7^{-2}\cdot 7^n}{6\cdot 6^n}=\frac{-7^{-2}}{6}\lim_{n\to\infty}\frac{7^n}{6^n}=$$

$$=-\frac{7^{-2}}{6}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7}{6}\right)^n=\left\|\left(-\frac{7^{-2}}{6}\right)\cdot(+\infty)\right\|=-\infty.$$

в)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^2\cdot 8^n-36^{-1}\cdot 6^n}{e^{-1}(e^2)^n+\frac{1}{7}\cdot 7^n}=\left\|\frac{2^2\cdot 8^n-36^{-1}\cdot 6^n}{e^{-1}(e^2)^n+\frac{1}{7}\cdot 7^n}=\left\langle e^2>7\right\rangle=\frac{8^n\cdot\left[2^2-36^{-1}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]}{(e^2)^n\cdot\left[e^{-1}+\frac{1}{7}\cdot\left(\frac{7}{e}\right)^n\right]}\right\|=\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot 8^n}{e^{-1}\cdot(e^2)^n}=$$

$$=4e\lim_{n\to\infty}\left(\frac{8}{e^2}\right)^n=\left\langle 8>e^2\right\rangle=+\infty.$$

Задача 5

а) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt{13n^2+2}-\sqrt{13n^2-5}\right)$; **б)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sqrt{n}-\sqrt{n(n+1)(n+2)}\right)$; **в)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\cdot\sqrt[3]{7n}+\sqrt[3]{3n^2+n-7n^4}\right)$.

Решение.

В этих примерах старшая степень в разности или сумме корней не определяется. Надо применить сопряжённые выражения для корней и формулы сокращённого умножения – разность квадратов, разность и сумма кубов. Запишем их тут так:

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2 \quad\Rightarrow\quad \sqrt{x}-\sqrt{y}=\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}.$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3 \quad\Rightarrow\quad \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=\frac{x-y}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}.$$

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3 \quad\Rightarrow\quad \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=\frac{x+y}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}.$$

а) $$\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt{13n^2+2}-\sqrt{13n^2-5}\right)=\left\|n\cdot\frac{\left(13n^2+2\right)-\left(13n^2-5\right)}{\sqrt{13n^2+2}+\sqrt{13n^2-5}}=\frac{7n}{\sqrt{13n^2}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{2}{13n^2}}+\sqrt{1-\frac{5}{13n^2}}\right)}\right\|=$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot 7}{\sqrt{13}n \cdot (1+1)} = \frac{7}{2\sqrt{13}}.$$

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sqrt{n} - \sqrt{n(n+1)(n+2)}\right) = \left\| \frac{(n^{3/2})^2 - n(n+1)(n+2)}{n\sqrt{n} + \sqrt{n(n+1)(n+2)}} \right\| = \|(*)\| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-3n^2}{n\sqrt{n}(1+1)} = -\frac{3}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n} = -\infty.$

(*)

1) $n\sqrt{n} + \sqrt{n(n+1)(n+2)} = n\sqrt{n} \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}{n\sqrt{n}}\right) = n\sqrt{n} \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{n(n+1)(n+2)}{n^3}}\right) =$

$= n\sqrt{n} \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{n}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+2}{n}}\right) = n\sqrt{n} \cdot \left(1 + \sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot \left(1+\frac{2}{n}\right)}\right);$

2) $(n^{3/2})^2 - n(n+1)(n+2) = n^3 - n(n^2+3n+2) = -3n^2 - 2n = -3n^2\left(1 + \frac{2}{3n}\right).$

в)

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n \cdot \sqrt[3]{7n} + \sqrt[3]{3n^2 + n - 7n^4}\right) = \left\| \frac{7n^4 + \left(3n^2 + n - 7n^4\right)}{\sqrt[3]{(7n^4)^2} - \sqrt[3]{(7n^4)(3n^2+n-7n^4)} + \sqrt[3]{(3n^2+n-7n^4)^2}} \right\| = \|(*)\| =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2}{\sqrt[3]{49}n^{8/3}(1-(-1)+(-1)^2)} = \frac{1}{\sqrt[3]{49}} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{2/3}} = 0.$

(*) $\sqrt[3]{(7n^4)^2} - \sqrt[3]{(7n^4)(3n^2+n-7n^4)} + \sqrt[3]{(3n^2+n-7n^4)^2} =$

$= \sqrt[3]{(7n^4)^2}\left(1 - \sqrt[3]{\frac{7n^4}{7n^4} \cdot \frac{3n^2+n-7n^4}{7n^4}} + \sqrt[3]{\left(\frac{3n^2+n-7n^4}{7n^4}\right)^2}\right) = \sqrt[3]{49}n^{8/3}\left(1 - \sqrt[3]{\frac{3}{7n^2} + \frac{1}{7n^3} - 1} + \sqrt[3]{\left(\frac{3}{7n^2} + \frac{1}{7n^3} - 1\right)^2}\right).$

Задача 6

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+3^2+...+n^2}{n(1+2+3+...+n)}$; **б)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^2+3^2+5^2+...+(2n-1)^2}{2^2+4^2+6^2+...+(2n)^2}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{n\cdot(n+1)}\right).$

Решение.

а) В числителе применим упомянутую в лекциях формулу суммы квадратов натуральных чисел $1^2+2^2+3^2+...+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. В знаменателе просуммируем арифметическую прогрессию: $1+2+3+...+n = \frac{1+n}{2} \cdot n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+3^2+...+n^2}{n(1+2+3+...+n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n(n+1)(2n+1)}{6n^2(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{3n^3 \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{2}{3}.$$

б) Начнём со знаменателя, поскольку эта сумма понадобится и для числителя.

$$2^2+4^2+6^2+...+(2n)^2 = 2^2\left(1^2+2^2+3^2+...+n^2\right) = 4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}.$$

В числителе тогда имеем:

$$1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\left(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+\ldots+(2n-1)^2+(2n)^2\right)-\left(2^2+4^2+6^2+\ldots+(2n)^2\right).$$

В первой сумме применим формулу суммы всех квадратов натуральных чисел, – из пункта **а)**, – но слагаемых здесь ($2n$), а вторую сумму нашли выше, поэтому

$$1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{2n(2n+1)(2\cdot 2n+1)}{6}-\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}=\frac{n(4n^2-1)}{3}.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2}{2^2+4^2+6^2+\ldots+(2n)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n(4n^2-1)}{3\cdot 2n(n+1)(2n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2(n+1)}=1.$$

в) Чтобы найти сумму, стоящую под знаком предела, разложим общий член суммы на простейшие дроби:

$$\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Коэффициенты разложения найдите самостоятельно.

Следовательно,

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}\Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

Задача 7

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7n+1}{4n+2}\right)^{\frac{2n-1}{3n+1}}$; **б)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2-1}{n^2+1}\right)^{n+3}$; **в)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+1}{5n^2+2}\right)^{\frac{9n^6+n^4}{3n^3+1}}$; **г)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+3n-4}{3n^2-2n+5}\right)^{8n+5}$.

Решение.

а)

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7n+1}{4n+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{7n}{4n}=\frac{7}{4},\\&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{3n}=\frac{2}{3}.\end{aligned}\right]\Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{7n+1}{4n+2}\right)^{\frac{2n-1}{3n+1}}=\left(\frac{7}{4}\right)^{2/3}.$$

б)

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2-1}{n^2+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2}=2,\\&\lim_{n\to\infty}(n+3)=+\infty.\end{aligned}\right]\Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2-1}{n^2+1}\right)^{n+3}=\left\|2^{+\infty}\right\|=+\infty.$$

в)

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+1}{5n^2+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{5n^2}=\frac{3}{5},\\&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{9n^6+n^4}{3n^3+1}\right)=\lim_{n\to\infty}3n^3=+\infty.\end{aligned}\right]\Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+1}{5n^2+2}\right)^{\frac{9n^6+n^4}{3n^3+1}}=\left\|\left(\frac{3}{5}\right)^{+\infty}\right\|=0.$$

г)

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+3n-4}{3n^2-2n+5}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{3n^2}=1,\\&\lim_{n\to\infty}(8n+5)=+\infty.\end{aligned}\right]\Rightarrow\ \textit{неопределённость}\ \left[1^{\infty}\right].$$

Здесь требуется применить определение числа e: $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n} = e, \quad n\in \mathrm{N}.$

Следствие.

Если последовательность y_n – бесконечно большая последовательность (ББП), тогда

$$\exists \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{y_n}\right)^{y_n} = e.$$

Найдём y_n. Для этого в основании степени выполним деление числителя на знаменатель уголком и приведём к виду $\left(1+\dfrac{1}{y_n}\right)$.

$$\frac{3n^2+3n-4}{3n^2-2n+5} = 1+\frac{5n-9}{3n^2-2n+5} == 1+\frac{1}{\left(\dfrac{3n^2-2n+5}{5n-9}\right)} \Rightarrow y_n = \left(\frac{3n^2-2n+5}{5n-9}\right).$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{5n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n}{5} = +\infty \Rightarrow y_n - \textit{ББП}.$$

Применим упомянутое выше следствие, выделив в исходном пределе в квадратных скобках выражение $\left(1+\dfrac{1}{y_n}\right)^{y_n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+3n-4}{3n^2-2n+5}\right)^{8n+5} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\left(\dfrac{3n^2-2n+5}{5n-9}\right)}\right)^{\left(\frac{3n^2-2n+5}{5n-9}\right)}\right]^{\frac{5n-9}{3n^2-2n+5}\cdot(8n+5)} = \lim_{n\to\infty}\exp\left\{\frac{40n^2}{3n^2}\right\} = e^{40/3}.$$

Разработал старший преподаватель кафедры высшей математики Н. В. Петрова.