

Раздел № 04 Начала математического
анализа

Тема № 02 Предел функции

Практическое занятие № 14

Учебные вопросы:

1. Определение предела функции.
2. Вычисление пределов функций.

Литература

1. Сборник задач по математике в четырех частях. Под общей редакцией А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича.
2. Б.П. Демидович. Краткий курс высшей математики.
3. Л.Д. Кудрявцев. Курс математического анализа.
4. Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин. Сборник задач по математическому анализу. Т. 1-3.

Решение задач

Задача 1

Записать два определения – по Гейне и по Коши.

Доказать по определению Коши.

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow -9} \frac{5x^2 + 44x - 9}{x + 9} = -46; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8}{x - 1} = 0.$$

Решение.

а) Запишем определение по Гейне:

$$\forall \{x_n\}: \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -9 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5x_n^2 + 44x_n - 9}{x_n + 9} = -46.$$

2)

Запишем определение по Коши и докажем по этому определению:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \quad 0 < |x + 9| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \left| \frac{5x^2 + 44x - 9}{x + 9} + 46 \right| < \varepsilon.$$

3)

Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$ и найдём положительное число $\delta(\varepsilon)$ такое, что для всех аргументов, удовлетворяющих неравенству $0 < |x + 9| < \delta(\varepsilon)$, будет выполняться

$$\left| \frac{5x^2 + 44x - 9}{x + 9} + 46 \right| < \varepsilon.$$

неравенство

Имеем

$$\left| \frac{5x^2 + 44x - 9}{x + 9} + 46 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow |5x + 45| < \varepsilon \wedge x \neq -9 \Leftrightarrow (0 < |x + 9| < \delta \Rightarrow |5x + 45| = 5|x + 9| < 5\delta = \varepsilon) \Rightarrow \exists \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{5} > 0.$$

б) Запишем определение по Гейне:

$$\forall \{x_n\}: \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{x_n - 1} = 0.$$

2)

Запишем определение по Коши и докажем по этому определению:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \quad |x| > \delta(\varepsilon) \Rightarrow \left| \frac{8}{x - 1} \right| < \varepsilon.$$

3)

Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$ и найдём положительное число $\delta(\varepsilon)$ такое, что для всех аргументов, удовлетворяющих неравенству $|x| > \delta(\varepsilon)$, будет выполняться

$$\left| \frac{8}{x - 1} \right| < \varepsilon.$$

неравенство

Используем следующее свойство модулей: $|x - y| \geq |x| - |y|$.

$$\left| \frac{8}{x - 1} \right| = \frac{8}{|x - 1|} \leq \frac{8}{|x| - 1} < \frac{8}{\delta - 1} = \varepsilon \Rightarrow \exists \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon + 8}{\varepsilon} > 0.$$

Далее во всех задачах необходимо **вычислить предел функции**.

Задача 2

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^3+2) \cdot \operatorname{tg} x}{\sqrt[8]{x^7+5x^3+14}}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{3}\right)}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x^3+2)}{\operatorname{arctg}^4(x-1)}.$$

Решение.

а) Подставляем предельное значение аргумента в функцию, получаем:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^3+2) \cdot \operatorname{tg} x}{\sqrt[8]{x^7+5x^3+14}} = \frac{(0+2) \cdot \operatorname{tg} 0}{\sqrt[8]{0^7+5 \cdot 0^3+14}} = \frac{0}{14} = 0.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{3}\right)} = \frac{\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3}\right)} = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = -\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x^3+2)}{\operatorname{arctg}^4(x-1)} = \frac{\ln 3}{\operatorname{arctg}^4 0} = \frac{\ln 3}{0^4} = +\infty.$$

Заметим, здесь ноль в чётной степени, поэтому получается деление положительной константы на $(+0)$.

Следовательно, бесконечность в ответе со знаком «+».

Задача 3

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x+2}{(x^3-1)^2}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4-8x^2+16}{x^4+2x^3-3x^2-3x+6}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4-1}{(x^3-2x-1)^2}.$$

Решение.

а) Подставляем предельное значение аргумента в функцию, получаем:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x+2}{(x^3-1)^2} = \frac{1-3+2}{(1-1)^2} = \left[\frac{0}{0} \right].$$

Получили неопределённость. Чтобы её разрешить, – говорят «раскрыть неопределённость», – разлагаем числитель и знаменатель на множители. При этом подстановкой мы получили, что $x=1$ является корнем многочленов, поэтому делим числитель по схеме Горнера на $(x-1)$, а знаменатель разлагаем по формуле разности кубов.

Для числителя:

	1	0	-3	2
1	1	1	-2	0

Имеем

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x+2}{(x^3-1)^2} = \frac{(x-1)(x^2+x-2)}{(x-1)^2(x^2+x+1)^2} = \frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x^2+x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{(x^2+x+1)^2} = \frac{3}{3^2} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 8x^2 + 16}{x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 3x + 6} = \left[\frac{0}{0} \right] = \left\| \frac{(x^2 - 4)^2}{(x+2)(x^3 - 3x + 3)} = \frac{(x+2)^2(x-2)^2}{(x+2)(x^3 - 3x + 3)} \right\| =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-2)^2}{(x^3 - 3x + 3)} = \frac{0 \cdot 16}{1} = 0.$$

Для знаменателя:

	1	2	$\overset{\text{и}}{\text{и}}$	-3	6
-2			3		
	1	0	-3	3	0

)

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - 1}{(x^3 - 2x - 1)^2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \left\| \frac{(x+1)(x-1)(x^2+1)}{(x+1)^2(x^2-x+1)} \right\| = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(x^2+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \left\| \frac{-4}{0} \right\| = \infty.$$

Для знаменателя:

	1	0	$\overset{\text{и}}{\text{и}}$	-1
-1			2	
	1	-1	-1	0

Заметим, здесь ноль без знака, поэтому и бесконечность в ответе без знака.

Задача 4

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{16-x} - \sqrt{16+4x}}{\sqrt[5]{x^2} + 2\sqrt[3]{x}}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{4x^3-5} - \sqrt[3]{x^2+3x+17}}{\sqrt{5x+6} - 4}.$$

Решение.

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{16-x} - \sqrt{16+4x}}{\sqrt[5]{x^2} + 2\sqrt[3]{x}} = \left[\frac{0}{0} \right] = \left\| \frac{(16-x) - (16+4x)}{(\sqrt{16-x} + \sqrt{16+4x})x^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{15}} + 2)} = \frac{-5x}{(\sqrt{16-x} + \sqrt{16+4x})x^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{15}} + 2)} \right\| =$$

$$\overset{\text{и}}{\text{и}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-5x^{\frac{2}{3}}}{(\sqrt{16-x} + \sqrt{16+4x})\left(x^{\frac{1}{15}} + 2\right)} = \frac{0}{8 \cdot 2} = 0.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{4x^3-5} - \sqrt[3]{x^2+3x+17}}{\sqrt{5x+6} - 4} = \frac{\sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{27}}{\sqrt{16} - 4} = \left[\frac{0}{0} \right] = \left\| (*) \right\| = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(4x^3 - x^2 - 3x - 22)(\sqrt{5x+6} + 4)}{\left(\sqrt[3]{27^2} + \sqrt[3]{27 \cdot 27} + \sqrt[3]{27^2}\right)5(x-2)} = \left\| (**) \right\| =$$

$$\overset{\text{и}}{\text{и}} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(4x^2+7x+11) \cdot 8}{3 \cdot 9 \cdot 5(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(4x^2+7x+11) \cdot 8}{3 \cdot 9 \cdot 5} = \frac{41 \cdot 8}{135} = \frac{328}{135}.$$

$$\left\| (*) \right\| \overset{\text{и}}{\text{и}} \overset{\text{и}}{\text{и}} \frac{\sqrt[3]{4x^3-5} - \sqrt[3]{x^2+3x+17}}{\sqrt[3]{4x^3-5} + \sqrt[3]{4x^3-5} + \sqrt[3]{x^2+3x+17} + \sqrt[3]{x^2+3x+17}} = \overset{\text{и}}{\text{и}} \frac{4x^3 - x^2 - 3x - 22}{\sqrt[3]{4x^3-5} + \sqrt[3]{4x^3-5} + \sqrt[3]{x^2+3x+17} + \sqrt[3]{x^2+3x+17}}; \overset{\text{и}}{\text{и}}$$

$$\overset{\text{и}}{\text{и}} 2) \overset{\text{и}}{\text{и}} \sqrt{5x+6} - 4 = \frac{(5x+6) - 16}{\sqrt{5x+6} + 4} = \frac{5(x-2)}{\sqrt{5x+6} + 4}. \overset{\text{и}}{\text{и}}$$

$$\| (**) \| \dot{=} 4x^3 - x^2 - 3x - 22 = (x-2)(4x^2 + 7x + 11). \dot{=}$$

2	4	-1	$\dot{=} \frac{-1}{3}$	-22
	4	7	11	0

Задача 5

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}; \quad \text{б)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(x^2+1)(x^3+1) \cdot \dot{=} \cdot (x^n+1)}{((nx)^n+1)^{\frac{n+1}{2}}};$$

а)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right).$$

в)

Решение.

а)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \| (*) \| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5}{(5x)^5} = 5^{-5}.$$

$\| (*) \|$ Здесь метод вычисления такой же, как в пределах последовательностей – надо вынести старшую степень за скобки. Прodelайте это самостоятельно.

б)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(x^2+1)(x^3+1) \cdot \dot{=} \cdot (x^n+1)}{((nx)^n+1)^{\frac{n+1}{2}}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{1+2+3+\dots+n}}{(nx)^{n \cdot \frac{n+1}{2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(nx)^{\frac{n(n+1)}{2}}} = n^{\frac{-n(n+1)}{2}}.$$

В этом примере переменной является x , а n – константа.

в)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x + \sqrt{x + \sqrt{x}}) - x}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x} + \sqrt{x}}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x} + \sqrt{x}}}}$$

$$\dot{=} \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}.$$

Разработал старший преподаватель кафедры высшей математики Н. В. Петрова.