ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Раздел № 04 Начала математического анализа

Тема № 02 Предел функции

Практическое занятие № 15

Учебные вопросы:

1. Вычисление предела функции при помощи эквивалентных бесконечно малых функций.

Литература

1. Сборник задач по математике в четырех частях. Под общей редакцией А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича.
2. Б.П. Демидович. Краткий курс высшей математики.
3. Л.Д. Кудрявцев. Курс математического анализа.
4. Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин. Сборник задач по математическому анализу. Т. 1-3.

Решение задач

Приведём таблицу основных эквивалентных бесконечно малых функций (ЭБМФ), которую будем использовать в решении задач.

Таблица ЭБМФ

$$u(x) \underset{x \to x_0}{\to} 0$$

1.	$\sin u \underset{u\to 0}{\sim} u$	6.	$a^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u \cdot \ln a$
2.	$\operatorname{tg} u \underset{u\to 0}{\sim} u$	6.*	$e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$
3.	$\arcsin u \underset{u\to 0}{\sim} u$	7.	$\log_a(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} \dfrac{u}{\ln a}$
4.	$\operatorname{arctg} u \underset{u\to 0}{\sim} u$	7.*	$\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$
5.	$1 - \cos u \underset{u\to 0}{\sim} \dfrac{u^2}{2}$	8.	$[(1+u)^\mu - 1] \underset{u\to 0}{\sim} \mu \cdot u$

$$t(x) \underset{x \to x_0}{\to} 1$$

9.	$\log_a t \underset{t\to 1}{\sim} \dfrac{t-1}{\ln a}$	9.*	$\ln t \underset{t\to 1}{\sim} t - 1$
10.	$t^\mu - 1 \underset{t\to 1}{\sim} \mu \cdot (t-1)$		

Далее во всех задачах необходимо **вычислить предел** функции, используя таблицу ЭБМФ.

$$\boxed{\textit{Неопределённость} \left[\frac{0}{0}\right] \textit{при } x \to 0}$$

Задача 1

а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{9^{x^2} - 9^{-2x^3}}{\sin^2(5x)}$;   **б)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2^x - 5^{3x}}{\lg(1-3x)}$.

Решение.

а) Проверяем, что имеет место неопределённость $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Следовательно, в числителе и знаменателе стоят бесконечно малые функции (БМФ). Поскольку $x_0 = 0$, для этих БМФ при помощи таблицы ЭБМФ надо написать одночлен вида $C \cdot (x - x_0)^\alpha = C \cdot (x - 0)^\alpha = C \cdot x^\alpha$.

Напишем ЭБМФ для числителя:

$$9^{x^2} - 9^{-2x^3} = 9^{-2x^3} \cdot \left(\frac{9^{x^2}}{9^{-2x^3}} - 1\right) \underset{x\to 0}{\sim} 1 \cdot \left(9^{x^2} \cdot 9^{2x^3} - 1\right) =$$

$$= 9^{x^2+2x^3} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} (x^2+2x^3)\ln 9 = x^2\cdot(1+2x)\ln 9 \underset{x\to 0}{\sim} x^2 \ln 9 .$$

Применили формулу 6 для $u(x) = (x^2+2x^3) \underset{x\to 0}{\to} 0$.

Кроме того, применили теорему о произведении бесконечно малой функции на ограниченную функцию. А именно, под знаком эквивалентности, как и под знаком предела, **<u>сомножитель</u>**, который не является бесконечно малым, заменяется на его предельное значение в этом предельном переходе, т. е. на предел этой ограниченной функции в этой точке.

В этом примере x^2 – бесконечно малая функция при $x\to 0$, а второй сомножитель $(1+2x) \underset{x\to 0}{\to} 1$. Поэтому $x^2\cdot(1+2x) \underset{x\to 0}{\sim} x^2\cdot 1 = x^2$. Аналогично для сомножителя $9^{-2x^3} \underset{x\to 0}{\to} 1$.

Напишем ЭБМФ для знаменателя:

$\sin^2(5x) = (\sin 5x)\cdot(\sin 5x) \underset{x\to 0}{\sim} (5x)^2 = 25x^2$.

Применили ф.1 для $u(x) = 5x \underset{x\to 0}{\to} 0$.

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{9^{x^2}-9^{-2x^3}}{\sin^2(5x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\ln 9}{25x^2} = \frac{\ln 9}{25}.$$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-5^{3x}}{\lg(1-3x)} = \left[\frac{0}{0}\right]$.

$$2^x - 5^{3x} = 5^{3x}\cdot\left(\frac{2^x}{5^{3x}}-1\right) \underset{x\to 0}{\sim} 1\cdot(2^x\cdot 5^{-3x}-1) = e^{x\ln 2}\cdot e^{-3x\ln 5} - 1 =$$

$$= e^{x\ln 2-3x\ln 5} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x\ln 2 - 3x\ln 5 = x\cdot(\ln 2 - 3\ln 5) = x\ln\left(\frac{2}{125}\right).$$

Применили тождество $u^v = e^{v\cdot \ln u}$ и ф.6* для $u(x) = (x\ln 2 - 3x\ln 5) \underset{x\to 0}{\to} 0$.

$\lg(1-3x) = \lg(1+(-3x)) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{(-3x)}{\ln 10}$. Применили ф.7 для $u(x) = -3x \underset{x\to 0}{\to} 0$.

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{2^x-5^{3x}}{\lg(1-3x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x\ln\left(\frac{2}{125}\right)}{\frac{(-3x)}{\ln 10}} = -\frac{1}{3}\ln\left(\frac{2}{125}\right)\cdot\ln 10 = \ln\left(\frac{5}{\sqrt[3]{2}}\right)\cdot\ln 10.$$

Далее будем указывать только номер применяемой формулы.

Задача 2

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 5x}{\sin^2(\sqrt[3]{x^4})}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 3x-\sin 3x}{\operatorname{arcctg} 5x\cdot\arcsin 2x}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\cdot\ln(\cos 4x)}{\cos 5x\cdot\operatorname{arctg}^4(2x)}$.

Решение.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 5x}{\sin^2(\sqrt[3]{x^4})} = \left[\frac{0}{0}\right]$.

$\cos x - \cos 5x = -2\sin 3x\sin(-2x) \underset{x\to 0}{\sim} 12x^2$. (ф.1).

$\sin^2(\sqrt[3]{x^4}) \underset{x\to 0}{\sim} (\sqrt[3]{x^4})^2 = x^{8/3}$. (ф.1).

Использовали формулу $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 5x}{\sin^2(\sqrt[3]{x^4})} = \lim_{x\to 0}\frac{12x^2}{x^{8/3}} = 12\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{2/3}} = \left\|12\left(\frac{1}{(+0)}\right) = 12\cdot(+\infty)\right\| = +\infty.$$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}3x-\sin 3x}{\operatorname{arcctg}5x\cdot\arcsin 2x}=\left[\frac{0}{0}\right]$.

$\operatorname{tg}3x-\sin 3x=\sin 3x\cdot\left(\frac{1}{\cos 3x}-1\right)=\sin 3x\cdot\frac{1-\cos 3x}{\cos 3x}\underset{x\to 0}{\sim}3x\cdot\frac{\frac{(3x)^2}{2}}{1}=\frac{27}{2}x^3$. (ф.1, ф.5).

$\operatorname{arcctg}5x\cdot\arcsin 2x\underset{x\to 0}{\sim}\frac{\pi}{2}\cdot 2x=\pi x$. (ф.3).

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}3x-\sin 3x}{\operatorname{arcctg}5x\cdot\arcsin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{27x^3}{2\pi x}=\frac{27}{2\pi}\lim_{x\to 0}x^2=0.$$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\cdot\ln(\cos 4x)}{\cos 5x\cdot\operatorname{arctg}^4(2x)}=\left[\frac{0}{0}\right]$.

$\ln(\cos 4x)\underset{x\to 0}{\sim}(\cos 4x-1)\underset{x\to 0}{\sim}-8x^2$. (ф.9* и ф.5).

$\cos 5x\cdot\operatorname{arctg}^4(2x)\underset{x\to 0}{\sim}1\cdot(2x)^4=16x^4$. (ф.4).

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot\ln(\cos 4x)}{\cos 5x\cdot\operatorname{arctg}^4(2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot(-8x^2)}{16x^4}=-\frac{1}{2}.$$

Задача 3

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[10]{16+2x}-\sqrt[10]{16-x^2}}{\sqrt[3]{64-3x}-4}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+2x^2\right)}{\sqrt[15]{\cos(30\ \ ^3)}-1}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln^{10}(x^4+2)-\ln^{10}(5x^5+2)}{\sin(\operatorname{tg}3x^3)}$.

Решение.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[10]{16+2x}-\sqrt[10]{16-x^2}}{\sqrt[3]{64-3x}-4}=\left[\frac{0}{0}\right]$.

$$\sqrt[10]{16+2x}-\sqrt[10]{16-x^2}=\sqrt[10]{16-x^2}\cdot\left[\left(\frac{16+2x}{16-x^2}\right)^{1/10}-1\right]\underset{x\to 0}{\sim}\sqrt[10]{16}\cdot\frac{1}{10}\left[\left(\frac{16+2x}{16-x^2}\right)-1\right]=$$

$$=\frac{\sqrt[10]{16}}{10}\cdot\frac{2x+x^2}{16-x^2}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{\sqrt[10]{16}}{10}\cdot\frac{x\cdot(2+x)}{16}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{\sqrt[10]{16}}{10}\cdot\frac{x\cdot 2}{16}=\frac{\sqrt[10]{16}}{16\cdot 5}x.$$

Применили ф.10 для $t(x)=\left(\frac{16+2x}{16-x^2}\right)\underset{x\to 0}{\to}1$.

$\sqrt[3]{64-3x}-4=4\cdot\left[\left(\frac{64-3x}{64}\right)^{1/3}-1\right]\underset{x\to 0}{\sim}4\cdot\frac{1}{3}\left[\left(\frac{64-3x}{64}\right)-1\right]=\frac{4}{3}\cdot\frac{-3x}{64}=-\frac{x}{16}$. (ф.10).

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[10]{16+2x}-\sqrt[10]{16-x^2}}{\sqrt[3]{64-3x}-4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sqrt[10]{16}}{16\cdot 5}x}{\left(-\frac{x}{16}\right)}=-\frac{\sqrt[5]{4}}{5}.$$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+2x^2\right)}{\sqrt[15]{\cos(30\ \ ^3)}-1}=\left[\frac{0}{0}\right]$.

$\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+2x^2\right)\underset{x\to 0}{\sim}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+2x^2\right)-1=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+2x^2\right)-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+2x^2-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+2x^2\right)\cdot\cos\frac{\pi}{4}}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{2x^2}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}=4x^2$.

Применили формулу $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$ и ф.9*, ф.1.

$\sqrt[15]{\cos(30x^3)}-1=\left[(\cos(30x^3))^{1/15}-1\right]\underset{x\to 0}{\sim}\frac{1}{15}(\cos(30x^3)-1)\underset{x\to 0}{\sim}-\frac{(30x^3)^2}{30}=-30x^6$. (ф.10, ф.5).

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+2x^2\right)}{\sqrt[15]{\cos(30x^3)}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{4x^2}{-30x^6}=-\lim_{x\to 0}\frac{2}{15x^4}=-\left\|\frac{2}{+0}\right\|=-\infty.$$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln^{10}(x^4+2)-\mathrm{l}\ \ ^{10}(5x^5+2)}{\sin(\operatorname{tg}3x^3)}=\left[\frac{0}{0}\right]$.

$$\ln^{10}(x^4+2)-\ln^{10}(5x^5+2)=\ln^{10}(5x^5+2)\cdot\left[\left(\frac{\ln(x^4+2)}{\ln(5x^5+2)}\right)^{10}-1\right]\underset{x\to 0}{\sim}$$

$$\underset{x\to 0}{\sim}\ln^{10}2\cdot 10\left(\frac{\ln(x^4+2)}{\ln(5x^5+2)}-1\right)=10\ln^{10}2\cdot\frac{\ln(x^4+2)-\ln(5x^5+2)}{\ln(5x^5+2)}\underset{x\to 0}{\sim}$$

$$\underset{x\to 0}{\sim}10\ln^{10}2\cdot\frac{\ln(x^4+2)-\ln(5x^5+2)}{\ln 2}\underset{x\to 0}{\sim}10\ln^{10}2\cdot\frac{\ln(x^4+2)-\ln(5x^5+2)}{\ln 2}=$$

$$=10\ln^9 2\cdot\ln\frac{x^4+2}{5x^5+2}\underset{x\to 0}{\sim}10\ln^9 2\cdot\left(\frac{x^4+2}{5x^5+2}-1\right)=10\ln^9 2\cdot\left(\frac{x^4-5x^5}{5x^5+2}\right)\underset{x\to 0}{\sim}$$

$$=10\ln^9 2\cdot\left(\frac{x^4-5x^5}{5x^5+2}\right)\underset{x\to 0}{\sim}10\ln^9 2\cdot\frac{x^4(1-5x)}{2}\underset{x\to 0}{\sim}5\ln^9 2\cdot x^4.$$

Применили ф.10 и ф.9*, а также свойство логарифмов $\ln M-\ln N=\ln\frac{M}{N}$.

$\sin(\operatorname{tg}3x^3)\underset{x\to 0}{\sim}\operatorname{tg}3x^3\underset{x\to 0}{\sim}3x^3$. (ф.1, ф.2).

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\ln^{10}(x^4+2)-\ln^{10}(5x^5+2)}{\sin(\operatorname{tg}3x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{5\ln^9 2\cdot x^4}{3x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{5\ln^9 2\cdot x}{3}=0.$$

Неопределённость $\left[\frac{0}{0}\right]$ *при* $x\to x_0,\quad x_0\neq 0,\quad |x_0|<+\infty.$

Задача 4

а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3^{x^2}-81}{\sqrt[5]{x^2+7}-\sqrt[5]{9+4x^{-1}}}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin 5\pi x}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\ln(10-3x)}{e^{3x}-e^{x^2}}$.

Решение.

а) Проверяем, что имеет место неопределённость $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Значит, в числителе и знаменателе стоят БМФ. Поскольку $x_0=2$, для этих БМФ при помощи таблицы ЭБМФ следует написать одночлен вида $C(x-x_0)^\alpha=C(x-2)^\alpha$.

$$3^{x^2}-81=81\left(3^{x^2-4}-1\right)\underset{x\to 2}{\sim}81(x^2-4)\ln 3=81(x-2)(x+2)\ln 3\underset{x\to 2}{\sim}81(x-2)4\ln 3.$$

Применили ф.6 для $u(x)=(x^2-4)\underset{x\to 2}{\to}0$.

$$\sqrt[5]{x^2+7}-\sqrt[5]{9+4x^{-1}}=\sqrt[5]{9+4x^{-1}}\left[\left(\frac{x^2+7}{9+4x^{-1}}\right)^{1/5}-1\right]\underset{x\to 2}{\sim}\sqrt[5]{11}\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{x^2+7}{9+4x^{-1}}-1\right)=$$

$$=\frac{\sqrt[5]{11}}{5}\cdot\frac{x^2+7-9-4x^{-1}}{9+4x^{-1}}\underset{x\to 2}{\sim}\frac{\sqrt[5]{11}}{5}\cdot\frac{x^3-2x-4}{11x}\underset{x\to 2}{\sim}\frac{\sqrt[5]{11}}{5\cdot 22}(x^3-2x-4)=$$

$$=\frac{\sqrt[5]{11}}{5\cdot 22}(x-2)(x^2+2x+2)\underset{x\to 2}{\sim}\frac{\sqrt[5]{11}}{5\cdot 22}(x-2)\cdot 10=\frac{\sqrt[5]{11}}{11}(x-2).$$

Применили ф.10 для $t(x)=\left(\frac{x^2+7}{9+4x^{-1}}\right)\underset{x\to 2}{\to}1$.

$$\Rightarrow\lim_{x\to 2}\frac{3^{x^2}-81}{\sqrt[5]{x^2+7}-\sqrt[5]{9+4x^{-1}}}=\lim_{x\to 2}\frac{81(x-2)4\ln 3}{\left(\frac{\sqrt[5]{11}}{11}(x-2)\right)}=324\sqrt[5]{11^4}\ln 3.$$

б) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin 5\pi x}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}}=\left[\frac{0}{0}\right]$.

$\sin 5\,\pi x = sin\,5\,\pi[(x-1)+1] = sin[5\pi(x-1)+5\pi] = -sin\,5\,\pi(x-1)\underset{x\to1}{\sim} -5\pi(x-1)$. (ф.1).

$\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}[(x-1)+1]=\operatorname{ctg}\left[\frac{\pi}{2}(x-1)+\frac{\pi}{2}\right]=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}(x-1)\underset{x\to1}{\sim}-\frac{\pi}{2}(x-1)$. (ф.2).

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to1}\frac{\sin 5\pi x}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}}=\lim\limits_{x\to1}\frac{-5\pi(x-1)}{-\frac{\pi}{2}(x-1)}=10.$

Здесь применили тригонометрические формулы приведения.

в) $\lim\limits_{x\to3}\frac{\ln(10-3x)}{e^{3x}-e^{x^2}}=\left[\frac{0}{0}\right]$.

$\ln(10-3x)\underset{x\to3}{\sim}(10-3x)-1=-3(x-3)$. (ф.9*).

$e^{3x}-e^{x^2}=e^{x^2}\left(e^{3x-x^2}-1\right)\underset{x\to3}{\sim}e^9\cdot(3x-x^2)=e^9\cdot x(3-x)\underset{x\to3}{\sim}-e^9\cdot3(x-3)=$
$=-3e^9(x-3)$. (ф.6*).

$$\Rightarrow \lim_{x\to3}\frac{\ln(10-3x)}{e^{2x}-e^6}=\lim_{x\to3}\frac{-3(x-3)}{-3e^9(x-3)}=\frac{1}{e^9}=e^{-9}.$$

Неопределённость $[1^\infty]$ *в* $\lim\limits_{x\to x_0}(u(x))^{v(x)}$

Для вычисления таких пределов используется тождество $u^v=e^{v\cdot ln\,u}$.

Поскольку $u(x)\underset{x\to x_0}{\to}1$, применима ф.9* : $\ln u\underset{x\to x_0}{\sim}(u-1)$.

Поэтому $\lim\limits_{x\to x_0}\left(u(x)\right)^{v(x)}=[1^\infty]=\lim\limits_{x\to x_0}\left\{\exp\left(v(x)\cdot\ln u\,(x)\right)\right\}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to x_0}(v\cdot ln\,u)\right\}=$
$=\exp\left\{\lim\limits_{x\to x_0}(v\cdot(u-1))\right\}$.

Или так: $\lim\limits_{x\to x_0}(u(x))^{v(x)}=[1^\infty]=e^A,\quad A=\lim\limits_{x\to x_0}(v\cdot\ln u)=\lim\limits_{x\to x_0}(v\cdot(u-1))$.

Задача 5

а) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2}\right)^{1/\ln\cos 2x}$; **б)** $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+x^2\cdot2^x}{1+x^2\cdot5^x}\right)^{x^{-3}}$; **в)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{ctg}9x)^{\operatorname{tg}2x}$.

Решение.

а) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{1/\ln\cos}=[1^\infty]=e^A$.

$A=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\ln\cos 2x}\cdot\ln\left(\frac{\cos x}{\cos 2}\right)\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)}{\ln\cos}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to0}\frac{3x^2}{2\cdot(-2x^2)}=-\frac{3}{4}$.

$\ln\left(\frac{\cos x}{\cos 2\,x}\right)\underset{x\to0}{\sim}\left(\frac{\cos x}{\cos 2\,x}\right)-1=\frac{\cos x-\cos 2\,x}{\cos 2\,x}\underset{x\to0}{\sim}2\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}\underset{x\to0}{\sim}\frac{3x^2}{2}$.

$\ln\cos 2x\underset{x\to0}{\sim}\cos 2x-1\underset{x\to0}{\sim}-2x^2$.

Применили ф.9* (дважды), ф.1 (дважды), ф.5.

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{1/\ln\cos 2x}=e^A=e^{-3/4}$.

б) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+x^2\cdot2^x}{1+x^2\cdot5^x}\right)^{x^{-3}}=[1^\infty]=e^A$.

$$A=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^3}\cdot\ln\left(\frac{1+x^2\cdot 2^x}{1+x^2\cdot 5^x}\right)\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{1+x^2\cdot 2^x}{1+x^2\cdot 5^x}\right)}{x^3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{x^3\ln\frac{2}{5}}{x^3}=\ln\frac{2}{5}.$$

$$\ln\left(\frac{1+x^2\cdot 2^x}{1+x^2\cdot 5^x}\right)\underset{x\to 0}{\sim}\left(\frac{1+x^2\cdot 2^x}{1+x^2\cdot 5^x}\right)-1\underset{x\to 0}{\sim}\frac{x^2\cdot 2^x-x^2\cdot 5^x}{1}=x^2\cdot 5^x\left(\left(\frac{2}{5}\right)^x-1\right)\underset{x\to 0}{\sim}$$

$$\underset{x\to 0}{\sim}x^2\cdot x\ln\frac{2}{5}=x^3\cdot\ln\frac{2}{5}.$$

Применили ф.9*, ф.6.

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x^2\cdot 2^x}{1+x^2\cdot 5^x}\right)^{x^{-3}}=1^\infty=e^A=e^{\ln\frac{2}{5}}=\frac{2}{5}.$

в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{ctg}9x)^{\operatorname{tg}2x}=[1^\infty]=e^A.$

$$A=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}2x\cdot\ln\operatorname{ctg}9x)=[\infty\cdot 0]=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln\operatorname{ctg}9x}{\operatorname{ctg}2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-18\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{-2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=9.$$

$$\ln\operatorname{ctg}9x\underset{x\to\frac{\pi}{4}}{\sim}\operatorname{ctg}9x-1=\operatorname{ctg}9x-\operatorname{ctg}\frac{9\pi}{4}=-\frac{\sin\left(9x-\frac{9\pi}{4}\right)}{\sin 9x\sin\frac{9\pi}{4}}\underset{x\to\frac{\pi}{4}}{\sim}-\frac{\left(9x-\frac{9\pi}{4}\right)}{\sin^2\left(\frac{9\pi}{4}\right)}=-18\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

Применили ф.9*, ф.1 и формулу $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=-\frac{\sin\ (\alpha-\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$.

$$\operatorname{ctg}2x=\operatorname{ctg}\left(2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{tg}2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\underset{x\to\frac{\pi}{4}}{\sim}-2\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{ctg}9x)^{\operatorname{tg}2x}=1^\infty=e^A=e^9.$$

$$\boxed{\begin{bmatrix}\exists\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=A,\\ \exists\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=B,\end{bmatrix}\Rightarrow\exists\lim_{x\to x_0}(u(x))^{v(x)}=A^B.}$$

(*Исключаются неопределённости* $1^\infty,\ 0^0,\infty^0$.

В следующих задачах не будем указывать формулы таблицы ЭБМФ. Сделайте это самостоятельно.

Задача 6

а) $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt[8]{x}}{1-x}}$, 1) $a=0,$ 2) $a=1,$ 3) $a=+\infty$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 2x}{\sqrt[10]{x^2+4}-1}\right)^{\frac{\arcsin^2 x}{\sin 4x^2}}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{3^x-9}{\ln\left(2+\cos\frac{\pi x}{2}\right)}\right)^{\frac{8-x^3}{\ln(5-2x)}}$.

Решение.

а) 1) $a=0$.

$A=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)=\frac{1}{2},\quad B=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[8]{x}}{1-x}=1\quad\Rightarrow\quad\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt[8]{x}}{1-x}}=\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{2}.$

2) $a=1$.

$A=\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)=\frac{2}{3}$, $\quad B=\lim\limits_{x\to1}\frac{1-\sqrt[8]{x}}{1-x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to1}\frac{-\frac{1}{8}(x-1)}{-(x-1)}=\frac{1}{8}$.

$1-\sqrt[8]{x}=-(x^{1/8}-1)\underset{x\to1}{\sim}-\frac{1}{8}(x-1)$.

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt[8]{x}}{1-x}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{1/8}$.

3) $a=+\infty$.

$A=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1, B=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\sqrt[8]{x}}{1-x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-\sqrt[8]{x}}{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{7/8}}=0.$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt[8]{x}}{1-x}}=1^0=1.$

б)

$A=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin^2 2x}{\sqrt[10]{x^2+4}-1}\right)=\frac{0}{\sqrt[10]{4}-1}=0,\ B=\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin^2 x}{\sin 4x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{4x^2}=\frac{1}{4}.$

Поскольку показатель степени есть корень чётной степени, необходимо определить знак нуля.

$$\sin^2 2x\ge0,\ \sqrt[10]{4}>1\Rightarrow\quad A=+0\Rightarrow\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin^2 2x}{\sqrt[10]{x^2+4}-1}\right)^{\frac{\arcsin^2 x}{\sin 4x^2}}=(+0)^{1/4}=0.$$

в)

$$A=\lim_{x\to2}\left(\frac{3^x-9}{\ln\left(2+\cos\frac{\pi x}{2}\right)}\right)=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to2}\frac{9\ln3\,(x-2)}{\frac{\pi^2}{8}(x-2)^2}=\lim_{x\to2}\frac{9\ln3\cdot8}{\pi^2(x-2)}=\left\|\frac{9\ln3\cdot8}{\pi^2\cdot0}\right\|=\infty.$$

Здесь знак нуля может быть любым, поэтому этот предел равен бесконечности без знака.

$3^x-9==9(3^{x-2}-1)\underset{x\to2}{\sim}9(x-2)\ln3=9\ln3\,(x-2)$.

$$\ln\left(2+\cos\frac{\pi x}{2}\right)\underset{x\to2}{\sim}\left(2+\cos\frac{\pi x}{2}\right)-1=1+\cos\frac{\pi x}{2}=1+\cos\left[\frac{\pi}{2}(x-2)+\pi\right]=$$

$$=1-\cos\frac{\pi}{2}(x-2)\underset{x\to2}{\sim}\frac{\pi^2}{8}(x-2)^2.$$

$B=\lim\limits_{x\to2}\frac{8-x^3}{\ln(5-2x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to2}\frac{-12(x-2)}{-2(x-2)}=6.$

$8-x^3=-8\left[\left(\frac{x}{2}\right)^3-1\right]\underset{x\to2}{\sim}-8\cdot3\left(\frac{x}{2}-1\right)=-12(x-2).$

$\ln(5-2x)\underset{x\to2}{\sim}(5-2x)-1=-2(x-2).$

$$\Rightarrow\lim_{x\to2}\left(\frac{3^x-9}{\ln\left(2+\cos\frac{\pi x}{2}\right)}\right)^{\frac{8-x^3}{\ln(5-2x)}}=(\infty)^6=+\infty.$$

Далее покажем, что вычисление пределов последовательностей, которые мы рассматривали раньше, становится по таблице ЭБМФ в некотором смысле проще. Более того, в пределах последовательностей мы делали задачи только с квадратными и кубическими корнями, для которых применимы формулы сокращённого умножения. Но формулы 8 и 10 таблицы ЭБМФ позволяет решать такие задачи с любым показателем степени, т. е. таблица ЭБМФ расширяет возможности вычисления пределов.

Задача 7

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{5n^7-2n^5+4}-\sqrt[3]{5n^7+6n^6-3n}\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[5]{9n^{10}+6n^8-1}+\sqrt[5]{5n^8+n-9n^{10}}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n^2-9}{5n^2-2n+2}\right)^{\frac{3n^3-1}{n+1}}$.

Решение.

а)

$$\sqrt[3]{5n^7-2n^5+4}-\sqrt[3]{5n^7+6n^6-3n}=[\infty-\infty]=$$

$$=\sqrt[3]{5n^7+6n^6-3n}\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{5n^7-2n^5+4}{5n^7+6n^6-3n}}-1\right)\underset{n\to\infty}{\sim}\sqrt[3]{5n^7}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{5n^7-2n^5+4}{5n^7+6n^6-3n}-1\right)=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{5n^7}}{3}\cdot\frac{-6n^6-2n^5+3n+4}{5n^7+6n^6-3n}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{\sqrt[3]{5n^7}}{3}\cdot\frac{-6n^6}{5n^7}=-\frac{2\sqrt[3]{5}}{5}n^{4/3}.$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{5n^7-2n^5+4}-\sqrt[3]{5n^7+6n^6-3n}\right)=-\frac{2\sqrt[3]{5}}{5}\lim_{n\to\infty}n^{4/3}=-\infty.$$

б)

$$\sqrt[5]{9n^{10}+6n^8-1}-\sqrt[5]{9n^{10}-5n^8-n}=[\infty-\infty]=$$

$$=\sqrt[5]{9n^{10}-5n^8-n}\cdot\left(\sqrt[5]{\frac{9n^{10}+6n^8-1}{9n^{10}-5n^8-n}}-1\right)\underset{n\to\infty}{\sim}\sqrt[5]{9n^{10}}\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{9n^{10}+6n^8-1}{9n^{10}-5n^8-n}-1\right)=$$

$$=\frac{\sqrt[5]{9}n^2}{5}\cdot\frac{11n^8+n-1}{9n^{10}-5n^8-n}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{\sqrt[5]{9}n^2}{5}\cdot\frac{11n^8}{9n^{10}}.$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[5]{9n^{10}+6n^8-1}+\sqrt[5]{5n^8+n-9n^{10}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[5]{9}n^2}{5}\cdot\frac{11n^8}{9n^{10}}\right)=\frac{11}{5\cdot\sqrt[5]{9^4}}.$$

в)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^2-9}{5n^2-2n+2}\right)^{\frac{3n^3-1}{n+1}}=[1^\infty]=e^A.$$

$$A=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^3-1}{n+1}\cdot ln\frac{5n^2-9}{5n^2-2n+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3}{n}\cdot\left(\frac{5n^2-9}{5n^2-2n+2}-1\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2\cdot(2n-11)}{5n^2-2n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{6n^3}{5n^2}=\frac{6}{5}\lim_{n\to\infty}n=+\infty.$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^2-9}{5n^2-2n+2}\right)^{\frac{3n^3-1}{n+1}}=e^A=\|e^{+\infty}\|=+\infty.$$

Разработал старший преподаватель кафедры высшей математики Н. В. Петрова.