

Раздел № 04 Начала математического
анализа

Тема № 03 Непрерывность функции.

Практическое занятие № 16

Учебные вопросы:

1. Определение непрерывности функции.
2. Разрывы функции и их классификация.

Литература

1. Сборник задач по математике в четырех частях. Под общей редакцией А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича.
2. Б.П. Демидович. Краткий курс высшей математики.
3. Л.Д. Кудрявцев. Курс математического анализа.
4. Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин. Сборник задач по математическому анализу. Т. 1-3.

Решение задач

Замечание. Прежде чем переходить к решению задач стоит ознакомиться с лекцией 17 «Непрерывность функции».

Задача 1

Доказать непрерывность функции в указанной точке.

а) $f(x) = 6x^2 + 1$, $x_0 = 1$; **б)** $f(x) = \sin x$, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$; **в)** $f(x) = \sqrt[5]{x}$, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$.

Решение.

а) По определению непрерывности функции в точке надо доказать, что

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \text{ т. е. } \lim_{x \rightarrow 1} (6x^2 + 1) = 7.$$

Запишем определение по Коши и докажем по этому определению:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0: |x - 1| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |(6x^2 + 1) - 7| < \varepsilon.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное число.

$$|(6x^2 + 1) - 7| = |6x^2 - 6| = 6|x^2 - 1| = 6(|x - 1|^2 + 2|x - 1|) < 6(\delta^2 + 2\delta) = \varepsilon.$$

Тогда $\exists \delta(\varepsilon) = -1 + \sqrt{1 + \frac{\varepsilon}{6}} > 0$, такое что выполняется

$$|x - 1| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |(6x^2 + 1) - 7| < \varepsilon.$$

Следовательно, функция в этой точке непрерывна.

б) Аналогично,

$$|\sin x - \sin x_0| = 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2} \right| \leq 2 \left| \frac{x - x_0}{2} \right| \cdot 1 = |x - x_0| < \delta = \varepsilon.$$

Тогда $\exists \delta(\varepsilon) = \varepsilon > 0$, такое что выполняется

$$|x - x_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |\sin x - \sin x_0| < \varepsilon.$$

Следовательно, функция в этой точке непрерывна.

в) Здесь воспользуемся необходимым и достаточным условием непрерывности функции в точке, а именно

$$f(x) \text{ непрерывна в точке } x_0 \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x_0) = 0.$$

Составим и посчитаем предел, используя ЭБМФ:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\sqrt[5]{x_0 + \Delta x} - \sqrt[5]{x_0}) = \|(*)\| = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt[5]{x_0}}{5} \cdot \frac{\Delta x}{x_0} \right) = 0.$$

$$\|(*)\|: (\sqrt[5]{x_0 + \Delta x} - \sqrt[5]{x_0}) = \sqrt[5]{x_0} \left(\sqrt[5]{\frac{x_0 + \Delta x}{x_0}} - 1 \right) \underset{\Delta x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\sqrt[5]{x_0}}{5} \left(\frac{x_0 + \Delta x}{x_0} - 1 \right) = \frac{\sqrt[5]{x_0}}{5} \cdot \frac{\Delta x}{x_0}.$$

Следовательно, функция в этой точке непрерывна.

Задача 2

Функция определена в окрестности точки x_0 , кроме самой точки x_0 .

Доопределить функцию $f(x)$, задав $f(x_0)$ так, чтобы получившаяся функция была непрерывной в точке x_0 .

а) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$, $x_0 = -1$; **б)** $f(x) = x \operatorname{ctg} x$, $x_0 = 0$; **в)** $f(x) = \frac{1 - \cos}{x^2}$, $x_0 = 0$.

Решение.

а) По определению непрерывности функции в точке должно выполняться условие

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Посчитаем предел и доопределим функцию в точке $x_0 = -1$.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x - 1) = -2 \Rightarrow f(-1) := -2.$$

Следовательно, функция

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1}, & x \neq -1, \\ -2, & x = -1. \end{cases} \text{ является непрерывной в точке } x_0 = -1.$$

б) Аналогично,

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = \left\| \operatorname{tg} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \right\| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1 \Rightarrow f(0) := 1.$$

Следовательно, функция

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{ctg} x, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases} \text{ является непрерывной в точке } x_0 = 0.$$

в) Аналогично,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \left\| 1 - \cos x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2} \right\| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow f(0) := \frac{1}{2}.$$

Следовательно, функция

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2}, & x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases} \text{ является непрерывной в точке } x_0 = 0.$$

Задача 3

Доказать, что функция $f(x)$, не является непрерывной в точке x_0 . Определить характер разрыва.

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} x + 2, & x > 1, \\ 2x^2, & x \leq 1. \end{cases} \quad x_0 = 1; \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x+3)^2}, & x < -3, \\ 1, & x \geq -3. \end{cases}, \quad x_0 = -3.$$

Решение.

Здесь требуется проверять критерий непрерывности:

$$f(x) \text{ непрерывна в точке } x_0 \Leftrightarrow f(x_0 - 0) = f(x_0) = f(x_0 + 0).$$

а) Значение функции в заданной точке совпадает с левосторонним пределом функции в точке, а именно

$$f(1 - 0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} 2x^2 = 2 = f(1).$$

Посчитаем правосторонний предел:

$$f(1 + 0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (x + 2) = 3 \neq f(1) \text{ и } f(1 + 0) \neq f(1 - 0),$$

При этом оба односторонних предела существуют и конечны. Следовательно, функция терпит разрыв 1-го рода, скачок равен $f(1 + 0) - f(1 - 0) = 3 - 2 = 1$.

б) Аналогично,

$$f(-3 - 0) = \lim_{x \rightarrow -3-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3-0} \frac{1}{(x+3)^2} = \left\| \frac{1}{(-0)^2} \right\| = +\infty.$$

Функция в этой точке терпит разрыв 2-го рода.

Задача 4

Установить, существуют или не существуют значения a и b , при которых функция $f(x)$ непрерывна на своей области определения.

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ a, & x = 0; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)^2}{x^2-1}, & |x| \neq 1, \\ a, & x = -1, \\ b, & x = 1; \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \begin{cases} \frac{x \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin x}, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right], \\ a, & x = 0, \\ b, & x = \pi. \end{cases}$$

Решение.

Здесь требуется проверять критерий непрерывности во всех «проблемных» точках, т. е. в точках, где функция меняет своё аналитическое представление.

а) Здесь только одна такая точка:

$$f(0-0) \equiv f(0+0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \|(\ast)\| = 0; \quad f(0) = a.$$

$$\|(\ast)\|: \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \text{ограничена всюду, а } x \rightarrow 0 \Rightarrow x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow 0\|$$

Для непрерывности требуется соблюдение условия $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \Rightarrow a = 0$.

Следовательно, существует значение $a = 0$, при котором функция $f(x)$ непрерывна на своей области определения.

б) Здесь две точки: $x = \pm 1$.

1) $x = 1 \Rightarrow f(1) = b$.

$$f(1-0) \equiv f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{x+1} = 0 \Rightarrow 0 = f(1) = b.$$

Следовательно, существует значение $b = 0$, при котором функция $f(x)$ будет непрерывна в точке $x = 1$.

2) $x = -1 \Rightarrow f(-1) = a$.

$$f(-1-0) = \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{(x-1)^2}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{(x-1)}{x+1} = \left\| \frac{-2}{-0} \right\| = +\infty.$$

Следовательно, не существует конечное значение a , при котором функция $f(x)$ будет непрерывна в точке $x = -1$.

Таким образом, не существуют такие значения a и b , при которых функция $f(x)$ непрерывна на своей области определения.

в) Здесь две точки: $x = 0$ и $x = \pi$.

1) $x = 0 \Rightarrow f(0) = a$.

$$f(0-0) \equiv f(0+0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot 1}{x} = 1 \Rightarrow 1 = f(0) = a.$$

Следовательно, существует значение $a = 1$, при котором функция $f(x)$ будет непрерывна в точке $x = 0$.

2) $x = \pi \Rightarrow f(\pi) = b$.

$$f(\pi-0) \equiv f(\pi+0) = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin x} = \pi \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin x} = \|(\ast)\| = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} = f(\pi) = b.$$

$$\|(\ast)\|: \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \cos\left[\left(\frac{x-\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right] = -\sin\left(\frac{x-\pi}{2}\right) \underset{x \rightarrow \pi}{\sim} -\left(\frac{x-\pi}{2}\right);$$

$$\sin x = -\sin(x-\pi) \underset{x \rightarrow \pi}{\sim} -(x-\pi).$$

Следовательно, существует значение $b = \frac{\pi}{2}$, при котором функция $f(x)$ будет непрерывна в точке $x = \pi$.

Таким образом, существуют $a = 1$ и $b = \frac{\pi}{2}$, при которых функция $f(x)$ непрерывна на своей области определения.

Задача 5

Найти все точки разрыва функции $f(x)$, определить их род, доопределить функцию по непрерывности в точках устранимого разрыва.

$$\text{а) } f(x) = \frac{2x-1}{2x^2+3x-2}; \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} \cos^2\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 1, & x = 0; \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \exp\left\{\frac{x}{x-4}\right\}; \quad \text{г) } f(x) = \ln \frac{x-1}{x+5}.$$

Решение.

$$\text{а) } f(x) = \frac{2x-1}{2x^2+3x-2} = \frac{2x-1}{(2x-1)(x+2)} \Rightarrow x = \frac{1}{2}, x = -2.$$

$$1) x = \frac{1}{2}.$$

$$f\left(\frac{1}{2}-0\right) \equiv f\left(\frac{1}{2}+0\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x-1}{2x^2+3x-2} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1}{x+2} = \frac{2}{5}.$$

Следовательно, $x = \frac{1}{2}$ – устранимый разрыв. В этой точке можно доопределить по непрерывности функцию значением $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{5}$.

$$2) x = -2.$$

$$f(-2-0) = \lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{2x-1}{2x^2+3x-2} = \lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{1}{x+2} = \left\| \frac{1}{-0} \right\| = -\infty.$$

$$f(-2+0) = \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{2x-1}{2x^2+3x-2} = \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{1}{x+2} = \left\| \frac{1}{+0} \right\| = +\infty.$$

Следовательно, $x = -2$ – разрыв 2-го рода. Причём, и справа, и слева от этой точки функция стремится к бесконечности. Знак бесконечности при этом важен для построения графика функции.

б) Здесь одна точка: $x = 0$.

$$\text{Пусть } x_n = \frac{1}{\pi n}, y_n = \frac{2}{(2n+1)\pi}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_n \rightarrow 0, y_n \rightarrow 0.$$

$$\text{Однако } f(x_n) = \cos^2(\pi n) \rightarrow 1, f(y_n) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) \rightarrow 0.$$

Следовательно, исходя из определения предела по Гейне, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ не существует и тогда точка $x = 0$ – точка разрыва 2-го рода.

$$\text{в) } x = 4.$$

$$f(4-0) = \lim_{x \rightarrow 4-0} \exp\left\{\frac{x}{x-4}\right\} = \left\| \exp\left\{\frac{4}{-0}\right\} = e^{-\infty} \right\| = 0.$$

$$f(4+0) = \lim_{x \rightarrow 4+0} \exp\left\{\frac{x}{x-4}\right\} = \left\| \exp\left\{\frac{4}{+0}\right\} = e^{+\infty} \right\| = +\infty.$$

Следовательно, в точке $x = 4$ – разрыв 2-го рода.

При этом функция непрерывна слева.

г) Для этой функции сначала надо найти область определения:

$$\frac{x-1}{x+5} > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -5) \cup (1; +\infty).$$

Поэтому рассмотреть надо только левосторонний предел в точке $x = -5$ и правосторонний в точке $x = 1$.

$$f(-5 - 0) = \lim_{x \rightarrow -5 - 0} \ln \frac{x - 1}{x + 5} = \left\| \ln \frac{-6}{-0} = \ln(+\infty) \right\| = +\infty.$$

$$f(1 + 0) = \lim_{x \rightarrow 1 + 0} \ln \frac{x - 1}{x + 5} = \left\| \ln \frac{+0}{6} = \ln(+0) \right\| = -\infty.$$

Следовательно, в точках $x = -5$ и $x = 1$ функция терпит разрыв 2-го рода.

Разработал старший преподаватель кафедры высшей математики Н. В. Петрова.