

Раздел № 05 Дифференциальное

исчисление

Тема № 01 Производная и дифференциал.

Правила вычисления

Практическое занятие № 18

Учебные вопросы:

1. Определение производной.
2. Дифференцирование функции, заданной явно.
3. Дифференцирование функции, заданной параметрически.
4. Дифференцирование функции, заданной неявно.

Литература

1. Сборник задач по математике в четырех частях. Под общей редакцией А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича.
2. Б.П. Демидович. Краткий курс высшей математики.
3. Л.Д. Кудрявцев. Курс математического анализа.
4. Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин. Сборник задач по математическому анализу. Т. 1-3.

Решение задач

Задача 1

По определению найти указанные производные. Проверить по таблице.

а) $f(x) = 5^{\sqrt[3]{x}}$, $f'(-8)$; б) $f(x) = \sin^{251}(6x)$, $f'(x)$.

Решение.

а) Запишем определение производной функции в фиксированной точке:

$$f'(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Применим определение для заданной функции в указанной точке и вычислим предел, используя изученные ранее ЭБМФ:

$$\begin{aligned} f'(-8) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-8 + \Delta x) - f(-8)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{5^{\sqrt[3]{-8 + \Delta x}} - 5^{-2}}{\Delta x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln 5}{300} \cdot \Delta x}{\Delta x} = \frac{\ln 5}{300}. \\ 5^{\sqrt[3]{-8 + \Delta x}} - 5^{-2} &= 5^{-2} \left(5^{\sqrt[3]{-8 + \Delta x} + 2} - 1 \right) \sim 5^{-2} \left(\sqrt[3]{-8 + \Delta x} + 2 \right) \ln 5 = 5^{-2} (-2) \left(\sqrt[3]{\frac{8 - \Delta x}{8}} - 1 \right) \ln 5 \sim \\ &\sim -5^{-2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{8 - \Delta x}{8} - 1 \right) \ln 5 = -5^{-2} \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{-\Delta x}{8} \right) \ln 5 = \frac{\ln 5}{300} \cdot \Delta x. \end{aligned}$$

Проверка по таблице

$$f'(x) = 5^{\sqrt[3]{x}} \cdot \ln 5 \cdot \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$$

б) Аналогично,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin^{251}(6(x + \Delta x)) - \sin^{251}(6x)}{\Delta x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{251 \sin^{250}(6x) \cdot \cos(6x) \cdot 6 \cdot \Delta x}{\Delta x} = 251 \sin^{250}(6x) \cdot \cos(6x) \cdot 6. \\ \sin^{251}(6(x + \Delta x)) - \sin^{251}(6x) &= \sin^{251}(6x) \left[\left(\frac{\sin 6(x + \Delta x)}{\sin 6x} \right)^{251} - 1 \right] \sim 251 \sin^{251}(6x) \left[\left(\frac{\sin 6(x + \Delta x)}{\sin 6x} \right) - 1 \right] = \\ &= 251 \sin^{251}(6x) \frac{\sin 6(x + \Delta x) - \sin 6x}{\sin 6x} = 251 \sin^{250}(6x) \cdot 2 \cos(6x + 3\Delta x) \sin(3\Delta x) \sim \\ &\sim 251 \sin^{250}(6x) \cdot 2 \cos 6x \cdot 3\Delta x = 251 \sin^{250}(6x) \cdot \cos 6x \cdot 6 \cdot \Delta x. \end{aligned}$$

Проверка по таблице

$$f(x) = (\sin 6x)^{251}$$

Задача 2

Вычислить производную способом логарифмирования.

а) $y = \frac{(x-3)^2(2x-1)}{(x+1)^3}$; б) $y = \sqrt[3]{(x-4)(x^2-8x+13)}$.

Решение.

а) Логарифмируем равенство, задающее функцию:

$$\ln(y(x)) = \ln \left(\frac{(x-3)^2(2x-1)}{(x+1)^3} \right) = 2 \ln(x-3) + \ln(2x-1) - 3 \ln(x+1).$$

Продифференцируем полученное равенство по x :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\ln(y(x))) &= \frac{d}{dx}[2\ln(x-3) + \ln(2x-1) - 3\ln(x+1)] \Rightarrow \\ \frac{1}{y(x)} \cdot y'(x) &= \frac{2}{x-3} + \frac{1}{2x-1} \cdot 2 - \frac{3}{x+1} = \frac{2(2x-1)(x+1) + 2(x-3)(x+1) - 3(x-3)(2x-1)}{(x-3)(2x-1)(x+1)} \Rightarrow \\ \frac{1}{y(x)} \cdot y'(x) &= \frac{19x-17}{(x-3)(2x-1)(x+1)} \Rightarrow \\ y'(x) &= y(x) \cdot \frac{19x-17}{(x-3)(2x-1)(x+1)} = \frac{(x-3)^2(2x-1)}{(x+1)^3} \cdot \frac{19x-17}{(x-3)(2x-1)(x+1)} = \frac{(x-3)(19x-17)}{(x+1)^4}.\end{aligned}$$

б) Аналогично

$$\ln(y(x)) = \ln(\sqrt[3]{(x-4)(x^2-8x+13)}) = \frac{1}{3}[\ln(x-4) + \ln(x^2-8x+13)].$$

Продифференцируем полученное равенство по x :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\ln(y(x))) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{d}{dx}[\ln(x-4) + \ln(x^2-8x+13)] \Rightarrow \\ \frac{1}{y(x)} \cdot y'(x) &= \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{1}{(x-4)} + \frac{2(x-4)}{x^2-8x+13} \right] = \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{x^2-8x+13+2(x^2-8x+16)}{(x-4)(x^2-8x+13)} \right] = \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{3x^2-24x+45}{(x-4)(x^2-8x+13)} \right] \Rightarrow \\ \frac{1}{y(x)} \cdot y'(x) &= \frac{x^2-8x+15}{(x-4)(x^2-8x+13)} \Rightarrow \\ y'(x) &= \sqrt[3]{(x-4)(x^2-8x+13)} \cdot \frac{(x^2-8x+15)}{(x-4)(x^2-8x+13)} = \frac{x^2-8x+15}{\sqrt[3]{(x-4)^2(x^2-8x+13)^2}}.\end{aligned}$$

Задача 3

Вычислить производную, вводя промежуточную переменную.

$$y = \ln(\cos^2 x + \sqrt{1+\cos^4 x}); \quad \text{б)} \quad y = \frac{1}{2} \arctg(\sqrt[4]{1+x^4}) + \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt[4]{1+x^4}+1}{\sqrt[4]{1+x^4}-1}.$$

а)

Решение.

а) Введём переменную $t(x) = \cos^2 x$.

Тогда для $y = y(t(x))$ имеем: $y'(x) = y'(t) \cdot t'(x)$.

Посчитаем указанные производные.

$$y(t) = \ln(t + \sqrt{1+t^2}) \Rightarrow y'(t) = \frac{1}{t + \sqrt{1+t^2}} \cdot \left(1 + \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \Rightarrow$$

$$t(x) = \cos^2 x \Rightarrow t'(x) = -2 \cos x \cdot \sin x = -\sin 2x$$

$$y'(x) = y'(t) \cdot t'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cdot (-\sin 2x) = -\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}.$$

$$\text{б)} \quad y = \frac{1}{2} \arctg(\sqrt[4]{1+x^4}) + \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt[4]{1+x^4}+1}{\sqrt[4]{1+x^4}-1}.$$

Введём переменную $t(x) = \sqrt[4]{1+x^4}$ и применим логарифм частного

$$y(t) = \frac{1}{2} \arctg t + \frac{1}{4} [\ln(t+1) - \ln(t-1)].$$

Тогда для $y = y(t(x))$ имеем: $y'(x) = y'(t) \cdot t'(x)$.

$$y'(t) = \frac{1}{2(t^2+1)} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1} \right) = \frac{1}{2(t^2+1)} - \frac{1}{2(t^2-1)} = -\frac{1}{t^4-1} \Rightarrow$$

$$t'(x) = \frac{4x^3}{4 \cdot \sqrt[4]{(1+x^4)^3}} = \frac{x^3}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}$$

$$y'(x) = -\frac{1}{(\sqrt[4]{1+x^4})^4 - 1} \cdot \frac{x^3}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}} = -\frac{1}{x^4} \cdot \frac{x^3}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}} = -\frac{1}{x \cdot \sqrt[4]{(1+x^4)^3}}.$$

Задача 4

Вычислить производную показательно-степенной функции.

а) $f(x) = (\operatorname{tg} 2x)^{\sin^2 3x}$; б) $f(x) = \frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}$; в) $y = x^{x^x}$.

Решение.

а) В этом пункте покажем два способа вычисления производной таких функций.

1 способ.

Представим функцию в таком виде, чтобы можно было использовать табличные формулы и правила дифференцирования.

Для этого используем основное логарифмическое тождество $U^V = e^{\ln U^V} = e^{V \cdot \ln U}$.

$$f(x) = (\operatorname{tg} 2x)^{\sin^2 3x} = \exp(\sin^2 3x \cdot \ln \operatorname{tg} 2x) \Rightarrow f'(x) = \exp(\sin^2 3x \cdot \ln \operatorname{tg} 2x) \cdot (\sin^2 3x \cdot \ln \operatorname{tg} 2x)' = \exp(\sin^2 3x \cdot \ln \operatorname{tg} 2x) \cdot (2 \sin 3x \cdot \cos 3x \cdot 3 \cdot \ln \operatorname{tg} 2x + \sin^2 3x \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} 2x} \cdot \frac{1}{\cos^2 2x} \cdot 2) \Rightarrow f'(x) = (\operatorname{tg} 2x)^{\sin^2 3x} \left(3 \sin 6x \ln \operatorname{tg} 2x + \frac{4 \sin^2 3x}{\sin 4x} \right).$$

2 способ.

Прологарифмируем равенство, задающее функцию:

$$f(x) = (\operatorname{tg} 2x)^{\sin^2 3x}$$

Продифференцируем полученное равенство по x :

$$\frac{d}{dx} (\ln f(x)) = \frac{d}{dx} (\sin^2 3x \cdot \ln \operatorname{tg} 2x) \Rightarrow \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = 2 \sin 3x \cdot \cos 3x \cdot 3 \cdot \ln \operatorname{tg} 2x + \sin^2 3x \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} 2x} \cdot \frac{1}{\cos^2 2x} \cdot 2 \Rightarrow$$

$$f'(x) = f(x) \cdot \left(3 \sin 6x \ln \operatorname{tg} 2x + \frac{4 \sin^2 3x}{\sin 4x} \right) = (\operatorname{tg} 2x)^{\sin^2 3x} \left(3 \sin 6x \ln \operatorname{tg} 2x + \frac{4 \sin^2 3x}{\sin 4x} \right).$$

б) Для этой функции способ логарифмирования, очевидно, даёт более простое решение.

$$\ln f(x) = \ln \left(\frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}} \right) = \ln (\ln x)^x - \ln x^{\ln x} = x \ln (\ln x) - \ln^2 x \Rightarrow \frac{d}{dx} (\ln f(x)) = \frac{d}{dx} (x \ln (\ln x) - \ln^2 x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln (\ln x) + x \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} - 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$f'(x) = f(x) \cdot \left(\ln (\ln x) + \frac{1}{\ln x} - \frac{2 \ln x}{x} \right) = \left(\frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}} \right) \cdot \left(\ln (\ln x) + \frac{1}{\ln x} - \frac{2 \ln x}{x} \right) \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{(\ln x)^{x-1}}{x^{\ln x+1}} (x \ln x \cdot \ln (\ln x) + x - 2 \ln^2 x).$$

в) Здесь применим способ повторного логарифмирования.

$$\ln(y(x)) = \ln(x^{x^x}) = x^x \ln x \Rightarrow \ln(\ln y(x)) = \ln(x^x \ln x) = \ln(x^x) + \ln(\ln x) = x \ln x + \ln(\ln x) \Rightarrow \ln(\ln y(x)) = x \ln x + \ln(\ln x).$$

Дифференцируем полученное равенство по x :

$$\frac{1}{\ln y(x)} \cdot \frac{1}{y(x)} \cdot y'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}.$$

Откуда находим $y'(x)$, подставляя $y(x) = x^{x^x}$ и $\ln y(x) = x^x \cdot \ln x$:

$$y'(x) = y \cdot \ln y \cdot \left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} \right) = x^{x^x} \cdot x^x \ln x \cdot \left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} \right) = x^{x^x} \cdot x^x \left(\ln^2 x + \ln x + \frac{1}{x} \right) = x^{x^x} \cdot x^{x-1} (x \ln^2 x + x \ln x + 1).$$

Задача 5

Вычислить производные функций, заданных параметрически.

а) $y(x): \begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$ б) $y(x):$

Решение.

Напомним формулу:

$$y(x): \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases} \Rightarrow y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} \quad \text{или} \quad \text{так} \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

$$y'_t = a \sin t, \quad x'_t = a(1 - \cos t) = 2a \sin^2 \frac{t}{2} \Rightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{a \sin t}{2a \sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}.$$

а)

б) $y(t) = \ln(1 - \sqrt{1 - t^2}) - \ln t \Rightarrow$

$$y'_t = \frac{1}{1 - \sqrt{1 - t^2}} \cdot \frac{-1}{2\sqrt{1 - t^2}} \cdot (-2t) - \frac{1}{t} = \frac{t}{(1 - \sqrt{1 - t^2})\sqrt{1 - t^2}} - \frac{1}{t} = \frac{t^2 - (1 - \sqrt{1 - t^2})\sqrt{1 - t^2}}{t(1 - \sqrt{1 - t^2})\sqrt{1 - t^2}} = \frac{t^2 - (\sqrt{1 - t^2} - (1 - t^2))}{t(1 - \sqrt{1 - t^2})\sqrt{1 - t^2}} = \frac{1 - \sqrt{1 - t^2}}{t(1 - \sqrt{1 - t^2})\sqrt{1 - t^2}} = \frac{1}{t\sqrt{1 - t^2}}.$$

Для вычисления x'_t применим способ логарифмирования.

$$x(t) = \frac{\sqrt{1 - t^2}}{t}$$

Таким образом, получаем

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{1}{t\sqrt{1 - t^2}} \div \left(-\frac{1}{t^2\sqrt{1 - t^2}} \right) = -\frac{t^2\sqrt{1 - t^2}}{t\sqrt{1 - t^2}} = -t.$$

Задача 6

Вычислить производные функций, заданных неявно.

$$\text{а) } \sqrt{x^2+y^2}=a \exp\left\{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right\}, \quad a-\text{const}; \quad \text{б) } y=\operatorname{tg}(x+y); \quad \text{в) } xy=\exp|x-y|.$$

Решение.

функция $y(x)$ задана уравнением $F(x, y)=0$, а не выражена явно через свой

Если

аргумент, говорят, что **функция задана неявно**.

Производную этой функции $y'(x)$ находят из уравнения $\frac{d}{dx}[F(x, y)]=0$, где $F(x, y)$ рассматривается как сложная функция переменной x , т. е. $F(x, y)=F(x, y(x))$.

Уравнение, которое получается после дифференцирования равенства, задающего неявную функцию, всегда **линейно относительно искомой производной**, т. е. эта производная входит в него в первой степени. Разрешая это уравнение относительно $y'(x)$, как правило, получаем выражение, зависящее опять от двух переменных, т. е. $y'(x)=G(x, y)$.

$$\text{а) } \sqrt{x^2+y^2}=a \exp\left\{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right\}, \quad a-\text{const}.$$

Дифференцируем это равенство по x , не забывая, что $y=y(x)$ – функция от x .

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[\sqrt{x^2+(y(x))^2}] &= a \cdot \frac{d}{dx} \left[\exp\left\{\operatorname{arctg} \frac{y(x)}{x}\right\} \right] \Rightarrow \\ \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot (2x + 2y(x) \cdot y'(x)) &= a \exp\left\{\operatorname{arctg} \frac{y(x)}{x}\right\} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{y'(x) \cdot x - y}{x^2} \end{aligned}$$

задачи:

Используем условие

$$\begin{aligned} \parallel \quad a \exp\left\{\operatorname{arctg} \frac{y(x)}{x}\right\} &= \sqrt{x^2+y^2} \quad \parallel \Rightarrow \quad \frac{x+y \cdot y'(x)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} \cdot \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{y'(x) \cdot x - y}{x^2} \Rightarrow \\ x+y \cdot y'(x) &= y'(x) \cdot x - y \Rightarrow y'_x = y'(x) = \frac{x+y}{x-y}. \end{aligned}$$

б) Аналогично, дифференцируем равенство $y=\operatorname{tg}(x+y)$ по x :

$$y'(x) = \frac{d}{dx}[\operatorname{tg}(x+y(x))] = \frac{1}{\cos^2(x+y)} \cdot (1+y'(x)) \Rightarrow y'(x) = \frac{1}{\cos^2(x+y)} \cdot (1+y'(x))$$

;

Получили выражение первой производной только через переменную y .

Но это не означает, что первая производная не зависит от x , – потому что $y = y(x)$.

в) Применим способ логарифмирования – для показательных выражений он упрощает вычисления.

Прологарифмируем равенство, задающее функцию:

$$\ln(xy) = \ln(\exp\{x - y\}) \Rightarrow \ln x + \ln y = x - y.$$

Дифференцируем последнее равенство по x :

$$\frac{d}{dx}[\ln x + \ln y(x)] = \frac{d}{dx}[x - y(x)] \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \cdot y'(x) = 1 - y'(x) \Rightarrow y'_x = y'(x) = \frac{y \cdot (x - 1)}{x \cdot (y + 1)}.$$

Разработал старший преподаватель кафедры высшей математики Н. В. Петрова.