

Раздел № 05 Д и ф ф е р е н ц и а л ь н о е

и с ч и с л е н и е

Тема № 01 Производная и дифференциал.

Правила вычисления

Практическое занятие № 19

Учебные вопросы:

1. Определение дифференцируемой функции и дифференциала.
2. Вычисление дифференциала для функций, заданных различными способами.
3. Приближённые вычисления при помощи дифференциала.
4. Касательная и нормаль к кривой.

Литература

1. Сборник задач по математике в четырех частях. Под общей редакцией А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича.
2. Б.П. Демидович. Краткий курс высшей математики.
3. Л.Д. Кудрявцев. Курс математического анализа.
4. Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин. Сборник задач по математическому анализу. Т. 1-3.

Решение задач

Задача 1

По заданному приращению функции в точке определить, дифференцируема ли функция в указанной точке.

$$\text{а) } \Delta f(1) = (x-1)^{5/3} - (x-1)^{2/3}; \quad \text{б) } \Delta f(x_0) = \sin\left(\frac{1}{x-x_0}\right) \ln(1 + (x-x_0)^2)$$

Решение.

а) Опираясь на критерий дифференцируемости функции в точке, проверим существование конечной производной в этой точке:

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\Delta f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^{5/3} - (x-1)^{2/3}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left((x-1)^{2/3} - (x-1)^{-1/3} \right) = \left\| 0 - \frac{1}{0} \right\| = \infty.$$

Следовательно, функция в этой точке не является дифференцируемой.

б) Аналогично,

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln(1 + (x-x_0)^2)}{x-x_0} \sin\left(\frac{1}{x-x_0}\right).$$

$$\text{Поскольку } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln(1 + (x-x_0)^2)}{x-x_0} = \left\| \ln(1 + (x-x_0)^2) \sim (x-x_0)^2 \right\| = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x-x_0)^2}{x-x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x-x_0) = 0,$$

а функция $\sin\left(\frac{1}{x-x_0}\right)$ определена и ограничена всюду, произведение бесконечно малой

функции на ограниченную функцию есть бесконечно малая функция. Поэтому этот предел существует и равен нулю, т. е. конечная производная в рассматриваемой точке существует. Следовательно, функция в этой точке дифференцируема.

Задача 2

При каких значениях a и b функция $y(x)$

1) всюду непрерывна, 2) всюду дифференцируема, если

$$\text{а) } y(x) = \begin{cases} a + bx^2, & |x| \leq 1, \\ \frac{1}{|x|}, & |x| > 1. \end{cases} \quad \text{б) } y(x) = \begin{cases} 2x - 2, & x \leq 1, \\ a(x-1)(x-2)(x-b), & 1 < x < 2, \\ \frac{x}{2} - 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

Решение.

а) Функция определена всюду. Непрерывность и дифференцируемость могут быть нарушены только в точках $x = 1$, $x = -1$. Но поскольку функция является чётной, достаточно определить условия непрерывности и дифференцируемости в одной точке $x = 1$.

1) Непрерывность.

$$\left. \begin{aligned} y(1-0) = y(1) = a + b, \\ y(1+0) = 1 \end{aligned} \right] \Rightarrow y(1-0) = y(1+0) = y(1) \Leftrightarrow a + b = 1 \quad (\text{A}).$$

Следовательно, функция будет всюду непрерывна, если выполняется условие (A).

2) Посчитаем производную заданной функции:

$$y'(x) = \begin{cases} 2bx, & |x| \leq 1, \\ -\frac{\text{sign } x}{x^2}, & |x| > 1. \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} y'(1-0) = 2b, \\ y'(1+0) = -1 \end{aligned} \right] \Rightarrow y'(1-0) = y'(1+0) \Leftrightarrow 2b = -1 \quad (\text{B}).$$

Следовательно, функция будет всюду дифференцируема, если выполняются условия (А) и (В):

$$\begin{cases} a+b=1, \\ 2b=-1. \end{cases} \Rightarrow a=\frac{3}{2}, b=-\frac{1}{2}.$$

б) Функция определена всюду. Непрерывность и дифференцируемость могут быть нарушены только в точках $x=1$, $x=2$. Но не сложно увидеть, что в этих точках функция непрерывна, независимо от a и b . Действительно,

$$\left. \begin{aligned} y(1-0) = y(1) = 2-2 = 0 &\equiv y(1+0) = a \cdot 0 \cdot (-1) \cdot (1-b) = 0, \\ y(2-0) = a \cdot 1 \cdot 0 \cdot (2-b) = 0 &\equiv y(2+0) = y(2) = 1-1 = 0 \end{aligned} \right] \Rightarrow \forall a, \forall b.$$

Таким образом, эта функция непрерывна всюду, независимо от a и b .

2) Посчитаем производную заданной функции:

$$y'(x) = \begin{cases} 2, & x \leq 1, \\ a[(x-2)(x-b) + (x-1)(x-b) + (x-1)(x-2)], & 1 < x < 2, \\ \frac{1}{2}, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} y'(1-0) &= 2, \\ y'(1+0) &= a(-1) \cdot (1-b) = a(b-1) \end{aligned} \right] \Rightarrow y'(1-0) = y'(1+0) \Leftrightarrow a(b-1) = 2 \quad (C).$$

$$\left. \begin{aligned} y'(2-0) &= a(2-b), \\ y'(2+0) &= \frac{1}{2} \end{aligned} \right] \Rightarrow y'(2-0) = y'(2+0) \Leftrightarrow a(2-b) = \frac{1}{2} \quad (D).$$

Следовательно, функция будет всюду дифференцируема, если выполняются условия (С) и (D):

$$\begin{cases} a(b-1) = 2, \\ a(2-b) = \frac{1}{2}. \end{cases} \Rightarrow a = \frac{5}{2}, b = \frac{9}{5}.$$

Задача 3

Вычислить дифференциал функции $y(x) = 5x^2 + 3x$ в точке $x = 2$.

Решение.

1 способ.

Используем определение дифференцируемости функции в точке.

Найдём приращение функции в этой точке:

$$\Delta y(2) = y(2 + \Delta x) - y(2) = 5(2 + \Delta x)^2 + 3(2 + \Delta x) - 26 = 23\Delta x + 5(\Delta x)^2 = 23\Delta x + (5\Delta x)\Delta x.$$

Сравним с равенством по определению дифференцируемости функции в точке:

$$\Delta y(x_0) = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \quad A = \text{Const}, \quad \alpha(\Delta x) \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0 \Rightarrow A\Delta x \stackrel{\text{def}}{=} dy(x_0).$$

$$\text{Тогда } A = 23, \quad \alpha(\Delta x) = 5\Delta x \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0 \Rightarrow dy(2) = 23\Delta x = 23dx.$$

2 способ.

Используем формулу дифференциала функции в точке x : $dy(x) = y'(x)dx$.

$$y'(x) = 10x + 3 \Rightarrow y'(2) = 23 \Rightarrow dy(2) = 23dx.$$

Задача 4

Вычислить дифференциал функции, используя формулу и правила вычисления дифференциалов.

$$\text{а) } y(x) = \sqrt[5]{\lg^2(3x)}; \quad \text{б) } y(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}; \quad \text{в) } y(x) = x\sqrt{9-x^2} - 9\arccos \frac{x}{3}.$$

Решение.

а) По формуле

$$dy = y'(x)dx = \frac{2}{5}(\operatorname{tg} 3x)^{-3/5} \frac{3}{\cos^2 3x} dx = \frac{6dx}{5 \cos^2 3x \cdot \sqrt[5]{\operatorname{tg}^3(3x)}}.$$

б) Сначала упростим функцию, применив свойства логарифмов, а потом используем правила вычисления дифференциалов.

$$y(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} [\ln(1-x) - \ln(1+x)] \Rightarrow$$

$$dy = \frac{d(\arcsin x) \cdot \sqrt{1-x^2} - \arcsin x \cdot d(\sqrt{1-x^2})}{1-x^2} + \frac{1}{2} d[\ln(1-x) - \ln(1+x)]$$

Здесь будет проще считать, если в дроби, в первом слагаемом, сначала выполнить почленное деление, и только затем расписывать дифференциалы.

$$\begin{aligned} dy &= \frac{d(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\arcsin x}{1-x^2} d(\sqrt{1-x^2}) + \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{1-x} - \frac{1}{1+x} \right) dx = \\ &= \frac{dx}{1-x^2} - \frac{\arcsin x}{1-x^2} \cdot \frac{-x dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{dx}{1-x^2} = \frac{x \cdot \arcsin x dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}. \end{aligned}$$

в) По правилам

$$\begin{aligned} dy &= dx \cdot \sqrt{9-x^2} + x \cdot d(\sqrt{9-x^2}) - 9d\left(\arccos \frac{x}{3}\right) = dx \cdot \sqrt{9-x^2} + x \cdot \frac{-x dx}{\sqrt{9-x^2}} + 9 \frac{d\left(\frac{x}{3}\right)}{\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}} = \\ &= \sqrt{9-x^2} dx - \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}} + 9 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \sqrt{9-x^2} dx + \frac{(9-x^2)}{\sqrt{9-x^2}} dx = 2\sqrt{9-x^2} dx. \end{aligned}$$

Задача 5

Выразить дифференциал функции y через дифференциалы функций u и v , считая эти дифференциалы известными.

а) $y = \frac{uv}{u^2 + v^2}$; б) $y = \operatorname{arctg}\left(\frac{u}{v}\right) + \ln \sqrt{u^2 + v^2}$.

Решение.

а) По правилам $dy = \frac{d(uv) \cdot (u^2 + v^2) - uv \cdot d(u^2 + v^2)}{(u^2 + v^2)^2}$.

Посчитаем числитель отдельно:

$$\begin{aligned} d(uv) \cdot (u^2 + v^2) - uv \cdot d(u^2 + v^2) &= (udv + vdu)(u^2 + v^2) - uv(2udu + 2v dv) = \\ &= (u^3 - uv^2)dv + (v^3 - vu^2)dv = (u^2 - v^2)(udv - vdu). \end{aligned}$$

Тогда $dy = \frac{(u^2 - v^2)}{(u^2 + v^2)^2} (udv - vdu)$.

б) Применим инвариантность первого дифференциала, т. е. $dF(w) = F'_w \cdot dw$.

$$\begin{aligned} dy &= d\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{v}\right)\right) + \frac{1}{2} d(\ln(u^2 + v^2)) = \frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{1 + \left(\frac{u}{v}\right)^2} + \frac{1}{2} \frac{d(u^2 + v^2)}{u^2 + v^2} = \\ &= \frac{vdu - u dv}{u^2 + v^2} + \frac{udu + v dv}{u^2 + v^2} = \frac{(v+u)du + (v-u)dv}{u^2 + v^2}. \end{aligned}$$

Задача 6

В указанных точках найти дифференциал функций $y(x)$, заданных неявно или параметрически.

а) $xy - \sqrt[3]{xy^2 + 6} = 0, \quad M_0(2; 1);$ **б)** $y(x): \begin{cases} x = (t-1)^2(t-2), \\ y = (t-1)^2(t-3), \end{cases} \quad M_0(4; 0).$

Решение.

а) Берём равенство под знак дифференциала:

$$d(xy - \sqrt[3]{xy^2 + 6}) = d(0) \Rightarrow ydx + xdy - \frac{1}{3}(xy^2 + 6)^{-2/3}d(xy^2 + 6) = 0 \Rightarrow$$

$$ydx + xdy - \frac{1}{3}(xy^2 + 6)^{-2/3}(y^2dx + 2xydy) = 0.$$

Поскольку надо найти дифференциал функции в заданной точке, упрощать это равенство не надо. Можно сразу подставить в него координаты точки. Получится линейное уравнение относительно неизвестного значения дифференциала в точке, т. е. $dy(2)$, при этом dx считается известным.

Итак,

$$1 \cdot dx + 2 \cdot dy(2) - \frac{1}{3} \cdot 8^{-2/3} (1 \cdot dx + 4 \cdot dy(2)) = 0 \Rightarrow dy(2) = -\frac{11}{20} dx.$$

Замечание.

Получив таким не сложным способом для функции, заданной неявно, дифференциал в фиксированной точке, мы одновременно получили и производную этой функции в той же точке: $y'(2) = -\frac{11}{20}$.

б) Сначала определим значение параметра, соответствующего заданной точке.

Решаем систему $\begin{cases} 4 = (t-1)^2(t-2), \\ 0 = (t-1)^2(t-3). \end{cases}$

Из второго равенства имеем $t_0 = 1$ или $t_0 = 3$. Но если $t_0 = 1$, тогда $x_0 = 0$, и получается точка $(0; 0)$, т. е. не та, которая задана. Поэтому $t_0 = 3$. Посчитаем производную:

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{2(t-1)(t-3) + (t-1)^2}{2(t-1)(t-2) + (t-1)^2} \Rightarrow y'(4) = \frac{y'(3)}{x'(3)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow dy(4) = \frac{1}{2} dx.$$

Задача 6

Вычислить приближённо, с точностью до третьего знака после запятой, значение функции, используя первый дифференциал.

а) $\sin 29^\circ;$ **б)** $y = \sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 5}, \quad x = 1,012.$

Решение.

Воспользуемся формулой малых приращений $\Delta y(x_0) \approx dy(x_0) = y'(x_0)\Delta x$, откуда получаем равенство для приближенных вычислений значения функции в заданной точке x :

$$y(x) \approx y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) \quad (*)$$

а) $y = \sin x, \quad x = 29^\circ \Rightarrow$ пусть $x_0 = 30^\circ = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \Delta x = x - x_0 = -1^\circ = -\frac{\pi}{180}, \quad y(x_0) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$

$$y'(x) = \cos x \Rightarrow y'(x_0) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Тогда из равенства (*) получаем:

$$\sin 29^\circ \approx \sin \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{6} \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{1}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{360} \approx 0,484.$$

$$\text{б)} y = \sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 5}, \quad x = 1,012 \Rightarrow \text{пусть } x_0 = 1 \Rightarrow \Delta x = x - x_0 = 0,012; \quad y(x_0) = 2.$$

$$y(x) = \sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 5} \Rightarrow y'(x) = \frac{3x^2 + 4x}{3\sqrt[3]{(x^3 + 2x^2 + 5)^2}} \Rightarrow y'(1) = \frac{7}{12} \Rightarrow$$

$$y(1,012) \approx 2 + \frac{7}{12} \cdot 0,012 \approx 2,007.$$

Задача 7

Написать уравнения касательной и нормали к кривой в указанных точках.

$$\text{а)} y(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{(x-1)^2}, \quad x_0 = -2; \quad \text{б)} y(x): \begin{cases} x = 10\sin^2 2t, \\ y = 3\cos^2 5t, \end{cases} \quad t_0 = \frac{\pi}{6};$$

$$\text{в)} y^4 - 4x^4 - 6xy = 0, \quad M_0(1; 2).$$

Решение.

Напомним уравнения касательной и нормали к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, f(x_0))$:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) - \text{уравнение касательной};$$

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) - \text{уравнение нормали}.$$

а) Находим производную функции, вычисляем значение функции и её производной в точке $x_0 = -2$:

$$y'(x) = \frac{(3x^2 + 4x)(x-1) - 2(x^3 + 2x^2)}{(x-1)^3} \Rightarrow k_{\text{кас}} = y'(-2) = \frac{4}{9}; \quad y(-2) = 0, \quad M_0(-2; 0).$$

$$\text{Записываем уравнение касательной: } y - 0 = \frac{4}{9}(x + 2) \Leftrightarrow 4x - 9y + 8 = 0;$$

$$\text{уравнение нормали: } y - 0 = -\frac{9}{4}(x + 2) \Leftrightarrow 4x - 9y + 8 = 0.$$

б) Аналогично,

$$t_0 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow M_0\left(\frac{15}{2}, \frac{9}{4}\right), \quad y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = -\frac{3\sin 10t}{4\sin 4t} \Rightarrow k_{\text{кас}} = +\frac{3}{4}.$$

$$\text{Касательная: } y - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}\left(x - \frac{15}{2}\right) \Leftrightarrow 6x - 8y - 27 = 0;$$

$$\text{нормаль: } y - \frac{9}{4} = -\frac{4}{3}\left(x - \frac{15}{2}\right) \Leftrightarrow 16x + 12y - 147 = 0.$$

в) В этом пункте производную в точке найдём, используя формулу дифференциала, как было замечено в задаче **б а)**.

Берём под знак дифференциала равенство, задающее функцию, получаем:

$$4y^3 dy - 16x^3 dx - 6(ydx + xdy) = 0.$$

Подставляем координаты точки $M_0(1; 2)$:

$$24dy(1) - 16dx - 6(2dx + dy(1)) = 0 \Rightarrow dy(1) = \frac{14}{13}dx \Rightarrow k_{\text{кас}} = y'(1) = \frac{14}{13}.$$

$$\text{Касательная: } y - 2 = \frac{14}{13}(x - 1) \Leftrightarrow 14x - 13y + 12 = 0;$$

$$\text{нормаль: } y - 2 = -\frac{13}{14}(x - 1) \Leftrightarrow 13x + 14y - 41 = 0.$$