

Раздел № 01 Линейная алгебра

Тема № 02 Миноры и алгебраические дополнения.

Определители порядка n .

Практическое занятие № 02

Учебные вопросы:

1. Вычисление определителя посредством понижения порядка.
2. Приведение определителя к верхней или нижней треугольной форме.
3. Составление рекуррентных соотношений.
4. Вычисление определителя с помощью метода математической индукции.

Литература

1. Сборник задач по математике в четырех частях. Под общей редакцией А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича
2. Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики.
3. А.Е. Умнов. Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

Решение задач

Задача 1

Вычислить определитель по теореме разложения.

$$1) \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 7 & 0 & 5 \end{vmatrix} \quad 2) \begin{vmatrix} a & 1 & 3 & 5 \\ b & -7 & 9 & 2 \\ c & 0 & -4 & 0 \\ d & 6 & 8 & -10 \end{vmatrix}$$

Решение.

1) Запишем теорему разложения применительно ко второму столбцу:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 7 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} = a_{12}(-1)^{1+2}M_{12} + a_{22}(-1)^{2+2}M_{22} + a_{32}(-1)^{3+2}M_{32} =$$

$$= -a_{12}M_{12} + a_{22}M_{22} - a_{32}M_{32} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} + 0 = -(10 - 28) - (15 + 14) = 18 - 29 = -11.$$

2) Для этого определителя есть наилучший выбор строки или столбца разложения, а именно – третья строка, поскольку в ней наибольшее число нулей. Поэтому

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 3 & 5 \\ b & -7 & 9 & 2 \\ c & 0 & -4 & 0 \\ d & 6 & 8 & -10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} + a_{34}A_{34} =$$

$$= a_{31}M_{31} - a_{32}M_{32} + a_{33}M_{33} - a_{34}M_{34} = c \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -7 & 9 & 2 \\ 6 & 8 & -10 \end{vmatrix} - 0 - 4 \cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 5 \\ b & -7 & 2 \\ d & 6 & -10 \end{vmatrix} - 0 =$$

$$= c \cdot (-90 + 36 - 280 - 270 - 16 - 210) - 4 \cdot (70a + 2d + 30b + 35d - 12a + 10b) = -830c - 4(58a + 40b + 37d) = -232a - 160b - 830c - 148d.$$

Задача 2

1) Вычислить определитель приведением к верхней треугольной форме.

2) Вычислить определитель, комбинируя способ приведения к треугольному виду и способ понижения порядка определителя по теореме разложения.

$$1) \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} \quad 2) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Решение.

1) Выполним элементарные преобразования со строками определителя.

При этом определитель, как известно из свойств определителей, не изменится.

Также используем свойство перестановки двух строк определителя и вынесение общего множителя из строки.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} I \times (-1) + II \\ I \times (-3) + III \\ I \times (-1) + IV \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -7 & 10 & -12 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 10 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = [II \times 7 + III] = \\
 = (-6) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = [III \leftrightarrow IV] = 6 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \end{vmatrix} = [III \times (-3) + IV] = 6 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 48.$$

2) Сначала выполним элементарные преобразования со строками так, чтобы в первом столбце все элементы кроме a_{11} стали нулями. И тогда применим теорему разложения по первому столбцу. Получим определитель четвертого порядка. В нем повторим этот же алгоритм, понизив порядок определителя до третьего. Определитель третьего порядка посчитаем по правилу Саррюса.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = [I \leftrightarrow II] = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = [I \cdot (-2) + II] = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \\
 = (-1) \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = [I \leftrightarrow II] = + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = [I \cdot 3 + II] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \\
 = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 16 - 4 - 6 = 6.$$

Задача 3

Вычислить определитель n-го порядка приведением к треугольному виду.

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix} \quad 2) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}$$

Решение.

1) Прибавим первую строку ко всем остальным строкам:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 2 & 6 & \dots & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 2n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!$$

2) Умножим последнюю строку на (-1) и прибавим ко всем другим строкам:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}.$$

Умножаем первую строку на (-2) и складываем с последней строкой:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 2 & 2 & \dots & 5 \end{vmatrix}.$$

Умножаем вторую строку на (-2) и складываем с последней строкой:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 2 & 2 & \dots & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 7 \end{vmatrix}.$$

Заметим, что когда в третьей строке диагональный элемент a_{33} равен «1», элемент a_{nn} равен «7», т.е. $7=2 \cdot 3+1$.

Проведем аналогичные действия до тех пор, пока все элементы последней строки, кроме a_{nn} , не станут равны нулю. Получим

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix} = \dots = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 7 \end{vmatrix} = \dots = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2n+1 \end{vmatrix} = 2n+1.$$

Задача 4

Вычислить определитель, элементы которого заданы условием $a_{ij} = \min(i, j)$.

Решение.

Запишем этот определитель для порядка n:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \end{vmatrix}.$$

Умножим первую строку на (-1) и прибавим ко всем другим строкам, после чего применим теорему разложения по первому столбцу.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \end{vmatrix} = \Delta_{n-1}.$$

Получили рекуррентное соотношение, из которого имеем

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \end{vmatrix} = \Delta_{n-1} = 1 \cdot \Delta_{n-2} = \dots = 1 \cdot \Delta_1 = 1 \cdot 1 = 1.$$

Задача 5

Вычислить определитель $\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$

Решение.

Заметим, что этот определитель есть обобщение определителя из задачи 2 для порядка n . В задаче 2 получается $n=5$. Выведем общий результат и проверим для $n=5$.

Разложим Δ_n по 1-й строке, а затем получившийся определитель $(n-1)$ -го порядка также разложим по его 1-й строке:

$$\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\Delta_{n-1} - (1 \cdot \Delta_{n-2} - 1 \cdot 0) = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}.$$

Получили рекуррентное соотношение $\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$, откуда получаем

$$\Delta_n - \Delta_{n-1} = \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}.$$

Таким образом, разность двух определителей рассматриваемого типа, порядок первого из которых на единицу превосходит порядок второго, одна и та же для всех значений натурального n .

Найдем эту разность при $n=3$:

$$\Delta_3 - \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (8 - 2 - 2) - (4 - 1) = 1.$$

Итак, имеем

$$\Delta_n - \Delta_{n-1} = 1 \Rightarrow \Delta_n = \Delta_{n-1} + 1 = \Delta_{n-2} + 2 = \Delta_{n-3} + 3 = \dots = \Delta_{n-(n-1)} + (n-1) = \Delta_1 + n - 1 = 2 + n - 1 = n + 1.$$

Окончательно получаем $\Delta_n = n + 1$.

В задаче 2 имеем $n=5$. Значит, $\Delta_5 = 5 + 1 = 6$, что совпадает с результатом задачи 2.

Задача 6

$$\text{Для определителя Вандермонда } V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

доказать методом математической индукции, что он равен произведению всевозможных разностей $(x_j - x_i)$, $1 \leq i < j \leq n$, т.е.

$$V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Доказательство.

Индукция по размеру определителя n .

База индукции.

Для $n=2$ имеем

$$V_2(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1, \text{ что верно.}$$

Индукционное предположение.

Пусть верно утверждение для $n=k-1$:

$$V_{k-1}(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_{k-1} \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_{k-1}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{k-2} & x_2^{k-2} & x_3^{k-2} & \dots & x_{k-1}^{k-2} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq k-1} (x_j - x_i).$$

Индукционный переход.

Докажем для $n=k$:

$$V_k(x_1, x_2, \dots, x_k) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_k \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_k^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{k-1} & x_2^{k-1} & x_3^{k-1} & \dots & x_k^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq k} (x_j - x_i).$$

Вычтем из последней k -й строки $(k-1)$ -ю строку, умноженную на x_1 и последовательно вычтем из m -й строки $(m-1)$ -ю строку, умноженную на x_1 . Получим

$$V_k(x_1, x_2, \dots, x_k) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \dots & x_k - x_1 \\ 0 & x_2^2 - x_1 x_2 & x_3^2 - x_1 x_3 & \dots & x_k^2 - x_1 x_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_2^{k-1} - x_1 x_2^{k-2} & x_3^{k-1} - x_1 x_3^{k-2} & \dots & x_k^{k-1} - x_1 x_k^{k-2} \end{vmatrix}.$$

Применим теорему разложения по первому столбцу и вынесем из всех столбцов общие множители:

$$\begin{aligned} V_k(x_1, x_2, \dots, x_k) &= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \dots & x_k - x_1 \\ (x_2 - x_1)x_2 & (x_3 - x_1)x_3 & \dots & (x_k - x_1)x_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_2 - x_1)x_2^{k-2} & (x_3 - x_1)x_3^{k-2} & \dots & (x_k - x_1)x_k^{k-2} \end{vmatrix} = \\ &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\dots(x_k - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_2 & x_3 & \dots & x_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{k-2} & x_3^{k-2} & \dots & x_k^{k-2} \end{vmatrix} = \prod_{j=2}^k (x_j - x_1) \cdot V_{k-1}(x_2, \dots, x_k). \end{aligned}$$

Применяя индукционное предположение для $V_{k-1}(x_2, \dots, x_k)$, а именно:

$$V_{k-1}(x_2, \dots, x_k) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_2 & x_3 & \dots & x_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{k-2} & x_3^{k-2} & \dots & x_k^{k-2} \end{vmatrix} = \prod_{2 \leq i \leq j \leq k} (x_j - x_i),$$

получаем

$$V_k(x_1, x_2, \dots, x_k) = \prod_{j=2}^k (x_j - x_1) \cdot V_{k-1}(x_2, \dots, x_k) = \prod_{j=2}^k (x_j - x_1) \cdot \prod_{2 \leq i \leq j \leq k} (x_j - x_i) = \prod_{1 \leq i \leq j \leq k} (x_j - x_i).$$

Индукционный переход доказан. Следовательно, методом математической индукции доказана формула вычисления определителя Вандермонда.

Следствие.

Определитель Вандермонда равен нулю лишь в случае, когда среди его аргументов $x_1, x_2, \dots, x_n$ есть хотя бы два равных.

Разработал старший преподаватель кафедры высшей математики Н. В. Петрова.