

Раздел № 05 Дифференциальное
исчисление

Тема № 02. Правило Лопиталья

Практическое занятие № 20

Учебные вопросы:

1. Правило Лопиталя

Литература

1. Сборник задач по математике в четырёх частях. Под общей редакцией А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича
2. Б.П. Демидович Краткий курс высшей математики.
3. Л.Д. Кудрявцев Курс математического анализа.
4. Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин. Сборник задач по математическому анализу. Т. 1-3.
5. А.П. Рябушко и др. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. Часть 1
6. П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 1

Решение задач

Замечание. Прежде чем переходить к решению задач стоит ознакомиться с лекцией 20. Основные теоремы дифференциального исчисления. Правило Лопиталя.

Правило Лопиталя:

Пусть $f(x)$, $g(x)$ определены на (a, b) :

1) $f(a \pm 0) = g(a \pm 0) = 0$,

2) $\exists$ конечные $f'(x)$ и $g'(x) \forall x \in (a, b)$,

3) $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$,

4) $\exists \lim_{x \rightarrow a \pm 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k$.

Следовательно, $\exists \lim_{x \rightarrow a \pm 0} \frac{f(x)}{g(x)} = k$, (a может равняться ∞).

На практике правило Лопиталя редко используют в полной мере, чаще всего ограничиваются непосредственно равенством $\lim_{x \rightarrow a \pm 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a \pm 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Рассмотрим ситуацию, когда такой подход даёт отрицательный результат.

1. Вычислите $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$.

На первый взгляд мы имеем неопределённость вида $\frac{0}{0}$, следовательно, можем применить правило Лопиталя:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2} \right)}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x} = \left\| -\cos \frac{1}{x} \right\|.$$

Мы пришли к пределу, который не существует ($\frac{1}{x} \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow 0$, но на бесконечности косинус ограничен, при этом не стремится ни к какому конечному числу). Причина такого печального результата кроется в нашем пренебрежении к полной формулировке правила Лопиталя, а именно к пункту 2 — производные числителя и знаменателя должны существовать в каждой точке интервала существования самих функций! Данный предел можно вычислить, но правило Лопиталя применять нельзя!

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Ответ: 0.

2. Вычислите $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{\sin x - x}$.

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{\sin x - x} = \left[\frac{0}{0} \right].$$

Убедимся, что производные всех функций, стоящих и в числителе и в знаменателе существуют в окрестности 0:

$$(e^{\sin x})' = \cos x e^{\sin x}; (e^x)' = e^x; (\sin x)' = \cos x; (x)' = 1.$$

В дальнейшем мы не будем отдельно уделять внимания полной проверке всех пунктов, но Вы должны помнить, что её необходимо сделать хотя бы устно.

Так как все требования правила Лопиталя выполнены, можем его применить:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{\sin x - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x e^{\sin x} - e^x}{\cos x - 1} = \left[\frac{0}{0} \right].$$

Есть необходимость применить правило ещё раз:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{\sin x - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x e^{\sin x} - e^x}{\cos x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x e^{\sin x} + \cos^2 x e^{\sin x} - e^x}{-\sin x} = \left[\frac{0}{0} \right].$$

Есть необходимость применить правило ещё раз:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{\sin x - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x e^{\sin x} - e^x}{\cos x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x e^{\sin x} + \cos^2 x e^{\sin x} - e^x}{-\sin x} = \text{? ?}$$

$$\text{?} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x e^{\sin x} - \sin x \cos x e^{\sin x} - 2 \cos x \sin x e^{\sin x} + \cos^3 x e^{\sin x} - e^x}{-\cos x} = 1.$$

Отличный пример на иррациональный выбор пути решения. Большинство студентов выбирают именно его. Давайте вернёмся к началу и попробуем посмотреть на этот же пример под другим углом:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{\sin x - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x (e^{\sin x - x} - 1)}{\sin x - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x - x} - 1}{\sin x - x} = \left[\frac{0}{0} \right].$$

При таком подходе мы просто немного преобразовали данное нам выражение по правилам действия со степенями. Так как множитель e^x при $x \rightarrow 0$ даёт нам 1, мы его можем заменить 1 и не прописывать. Применим правило Лопиталя к получившемуся выражению:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{\sin x - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x (e^{\sin x - x} - 1)}{\sin x - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x - x} - 1}{\sin x - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1) e^{\sin x - x}}{\cos x - 1} = \text{? ?}$$

$$\text{?} \lim_{x \rightarrow 0} e^{\sin x - x} = 1.$$

Сравните предоставленные решения и сделайте правильные выводы!

Ответ: 1.

3. Вычислите $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x \cos x}{\operatorname{tg}^3 x}$.

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x \cos x}{\operatorname{tg}^3 x} = \left[\frac{0}{0} \right].$$

Устно убедимся, что правило Лопиталя применять можно и, посмотрев на пример выше, торопиться не будем.

Заметим, $\operatorname{tg} x$ при $x \rightarrow 0$, следовательно, можем переписать пример в виде:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x \cos x}{x^3}.$$

Вот теперь применение правила Лопиталя пойдёт существенно легче:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x \cos x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \cos x - x \sin x}{3x^2} = \left[\frac{2}{0} \right] = \infty$$

Ответ: ∞ .

4. Вычислите $\lim_{x \rightarrow 1+0} (x-1) \ln(x-1)$.

Решение.

На первый взгляд правило Лопиталя не работает совсем, так как имеем неопределённость вида $0 \cdot \infty$, но это легко исправить:

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} (x-1) \ln(x-1) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{\ln(x-1)}{(x-1)^{-1}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right].$$

Теперь правило Лопиталя можем применить:

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} (x-1) \ln(x-1) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{\ln(x-1)}{(x-1)^{-1}} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{\frac{1}{x-1}}{-(x-1)^{-2}} = \lim_{x \rightarrow 1+0} -(x-1) = 0.$$

Ответ: 0.

5. Вычислите $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{arctg} x} \right)$.

Решение.

Вновь необходимо неопределённость вида $\infty - \infty$ преобразовать к виду $\frac{0}{0}$, затем применим асимптотическую формулу $\operatorname{arctg} x \sim x$ при $x \rightarrow 0$ (но только для знаменателя!):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{arctg} x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x - x}{x \operatorname{arctg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x - x}{x^2}.$$

Теперь правило Лопиталя можем применить:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{arctg} x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x - x}{x \operatorname{arctg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{(1+x^2)2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{2(1+x^2)} = 0. \end{aligned}$$

Ответ: 0.

6. Вычислить $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)^{\frac{1}{\ln x}} = \left[(\infty)^0 \right].$$

Представим наш предел в следующем виде

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (A)^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\ln(A)^{\frac{1}{\ln x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln A}{\ln x}}.$$

Обратим внимание, что в показателе степени получили неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$ при $x \rightarrow +\infty$, то есть к показателю степени мы можем применить правило Лопиталя:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln A}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}))'}{(\ln x)'}$$

Вычислим производную числителя отдельно:

$$(\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}))' = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{(x + \sqrt{x^2 + 1})\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Подставим, получившееся выражение в наш предел:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln A}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}))'}{(\ln x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = 1$$

Не забываем, что это мы нашли показатель степени!

Ответ: e .

Разработал старший преподаватель кафедры высшей математики Н.В. Ежова.