Раздел № 05 Дифференциальное исчисление

Тема № 03 Производные высших порядков. Формула Тейлора

Практическое занятие № 21

Учебные вопросы:

1. Производные и дифференциалы высших порядков.
2. Формула Тейлора для многочлена.
3. Формула Тейлора для гладких функций.
4. Разложение основных элементарных функций по формуле Маклорена.

Литература

1. Сборник задач по математике в четырёх частях. Под общей редакцией А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича

2. Б.П. Демидович Краткий курс высшей математики.

3. Л.Д. Кудрявцев Курс математического анализа.

4. Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин. Сборник задач по математическому анализу. Т. 1-3.

5. А.П. Рябушко и др. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. Часть 1

6. П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 1

Решение задач

Замечание. Прежде чем переходить к решению задач стоит ознакомиться с лекцией 21. Производные высших порядков. Формула Тейлора.

1. Вычислите второй дифференциал функции $y = \frac{3x+2}{x^2-2x+5}$ в точке $x = 0$.

Решение.

Второй дифференциал функции (или дифференциал второго порядка) находим по формуле: $d^2y = y''(dx)^2$.Следовательно, нам необходимо вычислить y'':

$$y' = \frac{(3x+2)'(x^2-2x+5) - (3x+2)(x^2-2x+5)'}{(x^2-2x+5)^2} =$$

$$= \frac{3(x^2-2x+5) - (3x+2)(2x-2)}{(x^2-2x+5)^2} = \frac{3x^2-6x+15-6x^2+2x+4}{(x^2-2x+5)^2} = \frac{-3x^2-4x+19}{(x^2-2x+5)^2}$$

$$y'' = \frac{(-3x^2-4x+19)'(x^2-2x+5)^2 - (-3x^2-4x+19)((x^2-2x+5)^2)'}{(x^2-2x+5)^4} =$$

$$= \frac{(-6x-4)(x^2-2x+5)^2 + (3x^2+4x-19)2(x^2-2x+5)(2x-2)}{(x^2-2x+5)^4} =$$

$$= \frac{(-6x-4)(x^2-2x+5) + (3x^2+4x-19)(4x-4)}{(x^2-2x+5)^3} =$$

$$= \frac{-6x^3+12x^2-30x-4x^2+8x-20+12x^3-12x^2+16x^2-16x-76x+76}{(x^2-2x+5)^3} =$$

$$= \frac{6x^3+12x^2-114x+56}{(x^2-2x+5)^3}.$$

$$y''(0) = \frac{56}{125} \Longrightarrow d^2y = \frac{56}{125}(dx)^2$$

Ответ: $\boldsymbol{\frac{56}{125}(dx)^2}$ **.**

2. Вычислите $\frac{d^2y}{dx^2}$ для функции, заданной параметрически уравнениями

$$y(x): \begin{cases} x = \ln(\cos t) \\ y = \ln(\cos 2t) \end{cases}.$$

Решение.

Для функции, заданной параметрически $y(x): \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ работают формулы:

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)};\ y''(x) = \frac{\left(y'(x)\right)'(t)}{x'(t)}.$$

Вычислим $y'(t)$ и $x'(t)$:

$y'(t) = \frac{-2\sin 2t}{\cos 2t} = -2\mathrm{tg}\, 2t;\ \ x'(t) = \frac{-\sin t}{\cos t} = -\mathrm{tg}\, t \Longrightarrow$

$$y'(x) = \frac{2\mathrm{tg}\, 2t}{\mathrm{tg}\, t} = 2 \cdot \frac{\sin 2t}{\cos 2t} \cdot \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{4\cos^2 t}{\cos 2t} = \frac{2(1+\cos 2t)}{\cos 2t} = \frac{2}{\cos 2t} + 2.$$

Вычислим $\left(y'(x)\right)'(t)$:

$$\left(y'(x)\right)'(t) = (2(\cos 2t)^{-1} + 2)' = -2(\cos 2t)^{-2}(-2\sin 2t) = \frac{4\sin 2t}{\cos^2 2t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y''(x) = \frac{4\sin 2t}{\cos^2 2t} \cdot \left(-\frac{\cos t}{\sin t}\right) = -\frac{8\cos^2 t}{\cos^2 2t}$$

Ответ: $\boldsymbol{\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{8\cos^2 t}{\cos^2 2t}}$.

3. Для функции $y = y(x)$, заданной неявно, вычислите $y''(x)$:

$$e^{x+y} = x - y.$$

Решение.

Продифференцируем данное равенство по x с учётом того, что y является функцией:

$$(e^{x+y})' = (x-y)' \Rightarrow e^{x+y}(1+y') = 1 - y' \Rightarrow e^{x+y} - 1 = -y'(1+e^{x+y}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1-e^{x+y}}{1+e^{x+y}} = \frac{1-x+y}{1+x-y}.$$

Обратите внимание, что в последнем переходе мы использовали равенство данное нам в условии задачи.

$$y''(x) = \left(\frac{1-x+y}{1+x-y}\right)' = \frac{(1-x+y)'(1+x-y) - (1+x-y)'(1-x+y)}{(1+x-y)^2} =$$

$$= \frac{(-1+y')(1+x-y) - (1-y')(1-x+y)}{(1+x-y)^2} = \frac{(1-y')(-2+2y)}{(1+x-y)^2} =$$

$$= \frac{2(y'-1)(y-1)}{(1+x-y)^2} = \frac{2\left(\frac{1-x+y}{1+x-y} - 1\right)(y-1)}{(1+x-y)^2} = \frac{4(y-x)(y-1)}{(1+x-y)^3}.$$

Ответ: $\boldsymbol{y''(x) = \frac{4(y-x)(y-1)}{(1+x-y)^3}}$.

4. Вычислите $(y)^{(n)}(x)$ для функции $y = \cos^2 3x$.

Решение.

Обратите внимание, что данная формулировка предполагает, что мы найдём некую зависимость и в ответе получим формулу, по которой мы сможем найти производную *<u>любого</u>* *порядка заданной функции.*

Найдём первые три производные и попробуем увидеть зависимость получаемого выражения от порядка производной:

$$y' = 2\cos 3x(-\sin 3x)(3) = -3\sin 6x;$$

$$y'' = -3 \cdot 6 \cdot \cos 6x;$$

$$y''' = 3 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \sin 6x \ldots$$

$$(y)^{(n)}(x) = 3 \cdot 6^{n-1} \cos\left(\frac{\pi n}{2} + 6x\right).$$

Ответ: $\boldsymbol{(y)^{(n)}(x) = 3 \cdot 6^{n-1} \cos\left(\frac{\pi n}{2} + 6x\right)}$.

Для успешного решения следующих задач нам будут необходимы формула Тейлора и разложение элементарных функций по формуле Маклорена:

Формула Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x);$$

Разложение основных элементарных функций по формуле Маклорена:

- $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n);$

- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2});$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1});$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n);$
- $(1+x)^\mu = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2!} x^2 + \cdots +$

$$+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)\cdot\ldots\cdot(\mu-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

5. Разложить многочлен $P_5(x) = 3x^5 - x^4 + 2x^3 + 7x - 9$ по степеням $x+1$.
Решение.
В данной задаче от нас требуется применить к заданному многочлену формулу Тейлора. Для этого нам необходимо найти все производные данного многочлена от нулевой до пятой включительно. Имеем в виду, что производная нулевого порядка это просто значение нашего многочлена в точке x_0.

- $P(-1) = -22;$
- $P'(x) = 15x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 7 \Rightarrow P'(-1) = 32;$
- $P''(x) = 60x^3 - 12x^2 + 12x \Rightarrow P''(-1) = -84;$
- $P^3(x) = 180x^2 - 24x + 12 \Rightarrow P'''(-1) = 216;$
- $P^4(x) = 360x - 24 \Rightarrow P^4(-1) = -384;$
- $P^5(x) = 360 \Rightarrow P^4(-1) = 360.$

Подставим, полученные числа в формулу Тейлора:

$$P_5(x) = -22 + 32(x+1) - 42(x+1)^2 + 36(x+1)^3 - 16(x+1)^4 - 3(x+1)^5.$$

Ответ: $\boldsymbol{P_5(x) = -22 + 32(x+1) - 42(x+1)^2 + 36(x+1)^3 - 16(x+1)^4 - 3(x+1)^5}$.

6. Функцию $y = \ln(2x+1)$ представить формулой Тейлора в окрестности точки:
   1. $x_0 = 0;$
   2. $x_0 = \frac{1}{2}.$

   Решение.

   - Для решения пункта 1 мы можем воспользоваться соответствующей формулой Маклорена, так как при $x_0 = 0 \Longrightarrow\ 2x_0 = 0$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) \Rightarrow$$

$$\ln(1+2x) = 2x - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(2x)^n}{n} + o(x^n);$$

   - Для решения второго пункта мы уже так поступить не можем, так как при $x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x_0 = 1 \neq 0.$

Можно применить формулу Тейлора непосредственно, то есть вывести формулу для производной n −го порядка. А можно попытать данное нам выражение всё-таки свести к готовой формуле. Сделаем замену переменной и применим соответствующую формулу Маклорена:
пусть $x - \frac{1}{2} = t$, тогда исходная функция примет вид:

$$y = \ln\left(2\left(t + \frac{1}{2}\right) + 1\right) \Rightarrow y = \ln(2t+2) \Rightarrow y = \ln 2 + \ln(t+1).$$

К функции $g(t) = \ln(1+t)$ можно применить формулу Маклорена, так как при $x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow t_0 = 0$:

$$g(t) = \ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{t^n}{n} + o(t^n).$$

Сделаем обратную замену и получим окончательный ответ:
$g(t) = \ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{t^n}{n} + o(t^n)$

$$g(t)=\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{2}+\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^n}{n}+o\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^n\right)\Rightarrow$$

$$y=\ln 2+\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{2}+\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^n}{n}+o\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^n\right).$$

Ответ: $\boldsymbol{y=\ln 2+\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{2}+\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^n}{n}+o\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^n\right).}$

7. С помощью формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа приближённо вычислить значение выражения $\sqrt[5]{237}$ с точностью до 10^{-3}.

Решение.

Воспользуемся разложением функции $(1+x)^\alpha$ в ряд Маклорена. Для этого преобразуем данное нам выражение:

$$\sqrt[5]{237}=\sqrt[5]{243-6}=\sqrt[5]{243\left(1-\frac{6}{243}\right)}=3\sqrt[5]{1-\frac{2}{81}}=3\left(1+\left(-\frac{2}{81}\right)\right)^{\frac{1}{5}}.$$

$$(1+x)^{\frac{1}{5}}=1+\frac{x}{5}+\frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)}{2!}x^2+\frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)\left(\frac{1}{5}-2\right)}{3!}x^3+\cdots$$

$$(1+x)^{\frac{1}{5}}=1+\frac{x}{5}-\frac{2x^2}{25}+\frac{6x^3}{125}+\cdots\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\left(1+\left(-\frac{2}{81}\right)\right)^{\frac{1}{5}}=3-\frac{6}{81}-\frac{6}{25}\cdot\frac{4}{81^2}-\frac{18}{125}\cdot\frac{8}{81^3}-\frac{63}{625}\cdot\frac{1}{81^4}\ldots\approx 2{,}9255\approx 2{,}926.$$

Точность вычислений может обеспечить или оценка остаточного члена или просто при поэтапном добавлении слагаемых следим за изменением цифр в нужном разряде. В нашем случае нам бы вполне хватило трёх.

8. Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\frac{1+x}{1-x}-2x}{e^{\operatorname{arctg}x}-\frac{1}{1-x}+\frac{x^2}{2}}$.

Решение.

Преобразуем числитель и применим к нему соответствующую формулу Маклорена:

$$\ln\frac{1+x}{1-x}-2x=\ln(1+x)-\ln(1-x)-2x=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)+o(x^3)-$$

$$-2x=\frac{2x^3}{3}+o(x^3).$$

Следовательно, знаменатель нам та же следует разложить до третьей степени:

- $e^{\operatorname{arctg}x}=\|\operatorname{arctg}x=t\|=e^t=1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+o(t^3).$

Так как $\operatorname{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$ получаем:

$$e^{\operatorname{arctg}x}=1+\left(x-\frac{x^3}{3}\right)+\frac{\left(x-\frac{x^3}{3}\right)^2}{2}+\frac{\left(x-\frac{x^3}{3}\right)^3}{6}+o(x^9)=$$

$$=1+x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)=1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

Обратите внимание, что из каждого слагаемого мы взяли все степени не превышающие три.

- $\frac{1}{1-x}=\left(1+(-x)\right)^{-1}=1+x+x^2+x^3+o(x^3).$

Собираем знаменатель:

$$e^{\operatorname{arctg}x}-\frac{1}{1-x}+\frac{x^2}{2}=1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}-1-x-x^2-x^3+\frac{x^2}{2}+o(x^3)=$$

$$= -\frac{7x^3}{6} + o(x^3).$$

Итого: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\frac{1+x}{1-x}-2x}{e^{\operatorname{arctg} x-\frac{1}{1-x}+\frac{x^2}{2}}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{2x^3}{3}+o(x^3)}{-\frac{7x^3}{6}+o(x^3)} = -\frac{4}{7}.$

Ответ: $-\frac{4}{7}$**.**

Разработал старший преподаватель кафедры высшей математики Н.В. Ежова.