

Раздел № 05 Дифференциальное
исчисление

Тема № 04 Исследование функции и
построение графика

Практическое занятие № 22

Учебные вопросы:

1. Условия монотонности функции.
2. Направление выпуклости графика функции.
3. Типы экстремумов функции.
4. Асимптоты графика функции.
5. Построение графика функции.

Литература

1. Сборник задач по математике в четырёх частях. Под общей редакцией А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича
2. Б.П. Демидович. Краткий курс высшей математики.
3. Л.Д. Кудрявцев. Курс математического анализа.
4. Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин. Сборник задач по математическому анализу. Т. 1-3.
5. А.П. Рябушко и др. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. Часть 1
6. П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 1

Решение задач

Замечание. Прежде чем переходить к решению задач стоит ознакомиться с лекцией 22. Исследование функции и построение графика.

1. Найдите промежутки монотонности функций:

а) $f(x) = 4x^3 - 21x^2 + 18x + 7$; б) $f(x) = \operatorname{arctg} x - \ln|x|$.

Решение.

а) Найдем первую производную:

$$f'(x) = 12x^2 - 42x + 18 = 6(2x^2 - 7x + 3) = 12\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 3),$$

методом интервалов исследуем знак первой производной (Рис. 1).



Рис. 1.

Ответ. Функция возрастает на промежутках $(-\infty, 1/2]$ и $[3, +\infty)$. Функция убывает на отрезке $[1/2, 3]$.

б) Найдем первую производную:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x} = -\frac{x^2 - x + 1}{x(x^2 + 1)}.$$

Заметим, что в нуле функция не определена, а числитель дроби всегда больше нуля (неполный квадрат), так что знак производной зависит только от знака x .

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0, f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 0.$$

Ответ. Функция возрастает на промежутке $(-\infty, 0)$ и убывает на промежутке $(0, +\infty)$.

2. Найти интервалы выпуклости, точки перегиба графика функций и тангенс угла наклона касательной к графику функции в точке перегиба:

а) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 12x + 7$; б) $f(x) = (x^2 - 2x - 1)e^x$.

Решение.

а) Вычислим вторую производную функции:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x + 12, f''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x - 1)(x + 1).$$

Методом интервалов исследуем знак второй производной (Рис. 2).

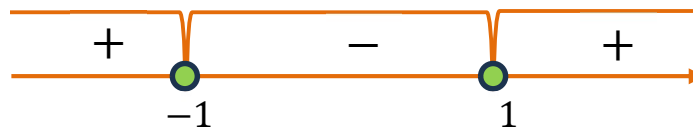


Рис. 2.

В точках $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$ вторая производная меняет знак, вычислим значение функции и первой производной в этих точках: $f(-1) = -10, f(1) = 14, f'(-1) = 20, f'(1) = 4$.

Ответ. График функции имеет выпуклость вниз на промежутках $(-\infty, -1)$ и на $(1, +\infty)$. Точки перегиба графика – $M_1(-1, -10)$ и $M_2(1, 14)$. Тангенсы углов наклона касательной в точках перегиба: $\operatorname{tg} \varphi_1 = 20, \operatorname{tg} \varphi_2 = 4$.

б) Вычислим первую и вторую производные функции:

$$f'(x) = e^x(x^2 - 2x - 1) + (2x - 2)e^x = e^x(x^2 - 3), f''(x) = e^x(x^2 - 3) + e^x \cdot 2x = e^x(x^2 + 2x - 3) = e^x(x - 1)(x + 3).$$

Методом интервалов исследуем знак второй производной (Рис. 3).

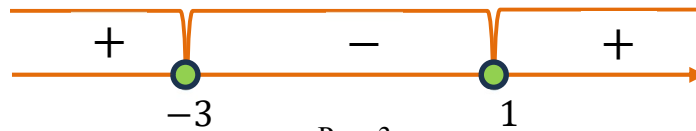


Рис. 3.

В точках $x_1 = -3$ и $x_2 = 1$ вторая производная меняет знак, вычислим значение функции и первой производной в этих точках:

$$f(-3) = \frac{14}{e^3} \approx 0,7, f(1) = -2e \approx -5,4;$$

$$f'(-3) = \frac{6}{e^3} \approx 0,3, f'(1) = -2e \approx -5,4.$$

Ответ. На промежутках $(-\infty, -3)$ и $(1, +\infty)$ график функции имеет выпуклость вниз, на промежутке $(-3, 1)$ график имеет выпуклость вверх. Точки перегиба – $M_1\left(-3, \frac{14}{e^3}\right)$, $M_2(1, -2e)$. Тангенсы углов наклона касательных в точках перегиба: $\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{6}{e^3}$, $\operatorname{tg} \varphi_2 = -2e$.

3. Найти экстремумы функций и определить их тип:

а) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 12$; **б)** $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$; **в)** $f(x) = |x^2 - 9|$.

Решение.

а) Найдем критические точки первой производной и исследуем ее на знак (Рис. 4).

$$f'(x) = (x^4 - 8x^2 + 12)' = 4x^3 - 16x = 4x(x-2)(x+2).$$

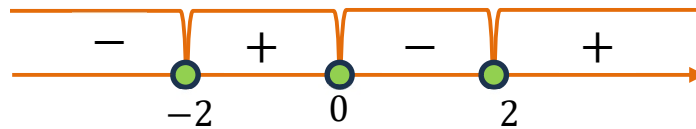


Рис. 4.

Ответ. Из рисунка 4 видно, что функция имеет локальный максимум в точке $x_1 = 0$ и два локальных минимума в точках $x_2 = -2$ и $x_3 = 2$. Поскольку в этих точках производная обращается в ноль, то это точки гладкого экстремума. Найдем значения функции в этих точках:

$$f(-2) = f(2) = -4, f(0) = 12.$$

б) Найдем критические точки первой производной и исследуем ее на знак (Рис. 5).

$$f'(x) = \left(\sqrt[3]{(x-2)^2}\right)' = \frac{2}{3}(x-2)^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}.$$

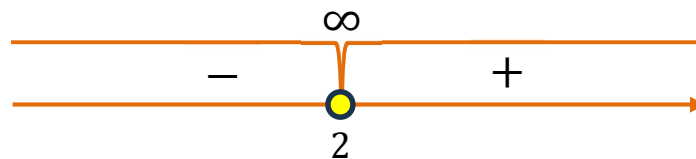


Рис. 5.

Производная поменяет знак в точке $x_0 = 2$, причем поменяет знак знаменатель дроби, в точке $x_0 = 2$ знаменатель обращается в ноль. Поскольку исходная функция непрерывна на всей числовой оси, то в данном случае мы имеем дело с бесконечной производной. Это означает, что касательная в критической точке $x_0 = 2$ будет перпендикулярна оси абсцисс, первая производная поменяет знак, и мы получаем точку острого минимума.

Ответ. В точке $x_0 = 2$ функция имеет острый локальный минимум, $f(2) = 0$.

в) Найдем критические точки первой производной и исследуем ее на знак.

Прежде всего заметим, что функция непрерывна на всей вещественной оси, при этом

$$f(x) = |x^2 - 9| = \begin{cases} x^2 - 9, & \text{если } x^2 \geq 9, \\ -x^2 + 9, & \text{если } x^2 < 9. \end{cases}$$

Если $x^2 \geq 9 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$, то $f'(x) = 2x$.

Если $x^2 < 9 \Leftrightarrow x \in (-3, 3)$, то $f'(x) = -2x$.

Исходя из вышесказанного, получаем, что в точках $x_1 = -3$ и $x_2 = 3$ производная не существует (терпит разрыв первого рода), причем односторонние производные таковы:

$$f'(-3-0) = -6, f'(-3+0) = 6; f'(3-0) = -6, f'(3+0) = 6.$$

На рисунке 6 изображены интервалы знакопостоянства первой производной.

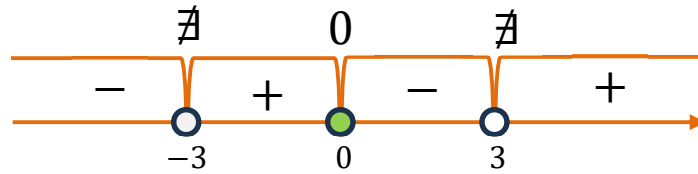


Рис. 6.

Ответ. Функция имеет один гладкий локальный максимум в точке $x_0 = 0, f(0) = 9$ и два угловых локальных минимума в точках $x_1 = -3$ и $x_2 = 3, f(\pm 3) = 0$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - 8}$ на отрезке $[-3, 6]$.

Решение.

Данная функция непрерывна на всей вещественной оси и, следовательно на отрезке $[-3, 6]$. Тогда, по второй теореме Вейерштрасса, она достигает наибольшего и наименьшего значений, то есть максимума и минимума. Чтобы найти максимум и минимум, достаточно найти значения функции в критических точках первой производной, а также ее значения на концах отрезка. Из полученных величин выбрать наибольшее и наименьшее.

Найдем критические точки первой производной:

$$f'(x) = \sqrt[3]{2x^2 - 8} = \frac{1}{3} (2x^2 - 8)^{-\frac{2}{3}} \cdot 4x = \frac{4}{3} \frac{x}{\sqrt[3]{(2x^2 - 8)^2}} \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2, x = 0 -$$

критические точки. Вычислим значения функции в найденных точках:

$$f(\pm 2) = 0, f(0) = -2.$$

Найдем также значения функции на концах отрезка:

$$f(-3) = \sqrt[3]{10}, f(6) = 4.$$

Сравнивая полученные величины, получаем ответ.

Ответ. $\max_{x \in [-3, 6]} f(x) = f(6) = 4, \min_{x \in [-3, 6]} f(x) = f(0) = -2.$

5. Найти асимптоты графиков функций:

а) $f(x) = \frac{x^4 - 3x^2 + x + 1}{(x-1)(x^2-4)}$; б) $f(x) = 2x + \arctg x$.

Решение.

а) Найдем область определения функции: $D(f) = (-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$.

Заметим, что

$$f(x) = \frac{x^4 - 3x^2 + x + 1}{(x-1)(x^2-4)} = \frac{(x-1)(x^3 + x^2 - 2x - 1)}{(x-1)(x^2-4)},$$

это означает, что в точке $x = 1$ функция имеет устранимый разрыв, в этой точке нет вертикальной асимптоты. Вычислим односторонние пределы в точках -2 и 2 :

$$\lim_{x \rightarrow -2-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{x^3 + x^2 - 2x - 1}{(x-2)(x+2)} = \left\| \frac{-8 + 4 + 4 - 1}{-4 \cdot (-0)} \right\| = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -2+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{x^3 + x^2 - 2x - 1}{(x-2)(x+2)} = \left\| \frac{-1}{-4 \cdot (+0)} \right\| = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^3 + x^2 - 2x - 1}{(x-2)(x+2)} = \left\| \frac{8 + 4 - 4 - 1}{(-0) \cdot 4} \right\| = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x^3 + x^2 - 2x - 1}{(x-2)(x+2)} = \left\| \frac{8 + 4 - 4 - 1}{(+0) \cdot 4} \right\| = +\infty,$$

то есть прямые $x = -2$ и $x = 2$ являются вертикальными асимптотами.

Чтобы найти наклонную асимптоту, можно использовать формулы для нахождения углового коэффициента и свободного члена функции $y = kx + b$, график которой есть

наклонная асимптота. Но в этом случае удобнее будет представить данную неправильную рациональную дробь в виде целой и дробной части:

$$\frac{x^3 + x^2 - 2x - 1}{x^2 - 4} = x + 1 + \frac{2x + 5}{x^2 - 4},$$

очевидно, что $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x+5}{x^2-4} = 0 \Rightarrow$ прямая, задаваемая уравнением $y = x + 1$ является наклонной асимптотой при $x \rightarrow \pm\infty$.

Ответ. Вертикальные асимптоты $x = \pm 2$, наклонная асимптота $y = x + 1$.

б) Функция $f(x) = 2x + \operatorname{arctg} x$ определена и непрерывна на всей вещественной оси, следовательно, вертикальных асимптот ее график не имеет. Найдем наклонные асимптоты на плюс и минус бесконечности: $l_{\pm} = k_{\pm}x + b_{\pm}$.

$$k_+ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \operatorname{arctg} x}{x} = 2, b_+ = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - k_+x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2},$$

то есть при $x \rightarrow +\infty$ есть наклонная асимптота $y = 2x + \frac{\pi}{2}$.

$$k_- = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + \operatorname{arctg} x}{x} = 2, b_- = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - k_-x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2},$$

то есть при $x \rightarrow -\infty$ есть наклонная асимптота $y = 2x - \frac{\pi}{2}$.

Ответ. График функции имеет две наклонные асимптоты: $y = 2x + \frac{\pi}{2}$ при $x \rightarrow +\infty$ и $y = 2x - \frac{\pi}{2}$ при $x \rightarrow -\infty$.

6. Провести полное исследование и построить график функции $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$.

Полное исследование функции и построение графика обычно проводится по плану. Планы могут быть различные, но мы будем использовать следующий.

План полного исследования функции.

1. Нахождение области определения функции.
2. Исследование на четность, нечетность, периодичность.
3. Исследование на непрерывность. Классификация точек разрыва.
4. Нахождение асимптот графика функции.
5. Вычисление первой производной и исследование ее на знак.
6. Вычисление второй производной и исследование ее на знак.
7. Составление таблицы, в которой анализируются все полученные данные.
8. При необходимости находим дополнительные точки графика, например, точки пересечения с осями координат или точки пересечения графика с асимптотами.
9. Построение графика функции по опорным точкам, отраженным в таблице.

Решение.

1. Найдем область определения функции.

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 1} \Rightarrow x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow Df = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty).$$

2. Исследуем на четность, нечетность. Вспомним определения четной и нечетной функций:

- функция $f(x)$ называется четной, если $\begin{cases} Df \text{ симметрична относительно нуля,} \\ \text{для } \forall x \in Df \Rightarrow f(-x) = f(x); \end{cases}$
- функция $f(x)$ называется нечетной, если $\begin{cases} Df \text{ симметрична относительно нуля,} \\ \text{для } \forall x \in Df \Rightarrow f(-x) = -f(x). \end{cases}$

График четной функции симметричен относительно оси ординат, график нечетной функции центрально симметричен относительно начала координат.

В нашем случае область определения симметрична относительно начала координат, и

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = -\frac{x^3}{x^2 - 1} = -f(x),$$

то есть функция нечетная. Построим ее график на промежутке $[0; +\infty)$, вторая часть графика симметрична относительно нуля.

3. Исследование на непрерывность. Классификация точек разрыва.

Так как все элементарные функции непрерывны на области определения, то точки разрыва – точки, в которых знаменатель обращается в ноль. На промежутке $[0; +\infty)$ есть одна такая точка $x_0 = 1$, вычислим односторонние пределы в этой точке:

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = \left\| \frac{1}{(-0) \cdot 2} \right\| = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = \left\| \frac{1}{(+0) \cdot 2} \right\| = +\infty,$$

то есть $x_0 = 1$ – точка разрыва второго рода.

4. Нахождение асимптот.

Вертикальную асимптоту мы уже нашли в предыдущем пункте – это прямая $x = 1$, найдем теперь наклонную асимптоту при $x \rightarrow +\infty$.

$$k_+ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = 1,$$

$$b_+ = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - k_+x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^3 + x}{x^2 - 1} = 0.$$

При $x \rightarrow +\infty$ есть наклонная асимптота $y = x$.

5. Вычисление первой производной и исследование ее на знак.

$$y' = \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} \right)' = \frac{3x^2(x^2 - 1) - 2x \cdot x^3}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})}{(x - 1)^2(x + 1)^2}.$$

Методом интервалов исследуем знак первой производной (Рис. 7).

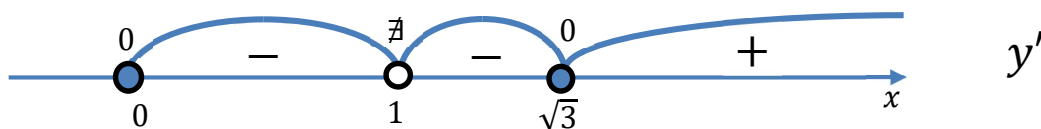


Рис. 7.

6. Вычисление второй производной и исследование ее на знак.

$$y'' = \left(\frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} \right)' = \frac{(4x^3 - 6x)(x^2 - 1)^2 - 2(x^2 - 1)2x(x^4 - 3x^2)}{(x^2 - 1)^4} =$$

$$= \frac{(4x^3 - 6x)(x^2 - 1) - 4x(x^4 - 3x^2)}{(x^2 - 1)^3} = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3} = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x - 1)^3(x + 1)^3}.$$

Методом интервалов исследуем знак второй производной (Рис. 8).



Рис. 8.

7. Полученные данные занесем в таблицу:

x	0	$(0, 1)$	$1 - 0$	$1 + 0$	$(1, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
y	0	—	$-\infty$	$+\infty$	+	$\frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2,6$	+
y'	0	—	$\nexists$	—	—	0	+
y''	0	—	$\nexists$	+	+	+	+
Γ_y							
комментарий	точка перегиба	убывает выпуклость вверх	вертикальная асимптота	убывает выпуклость вниз	гладкий локальный максимум	возрастает выпуклость вниз	

8. Дополнительные точки нам не понадобятся – точка пересечения с осями координат уже есть в таблице.
9. Построение графика функции.

Построение графика функции обычно начинается с асимптот. Далее на плоскости Oxy наносятся характерные точки из таблицы и небольшие фрагменты касательных в этих точках. Как уже было сказано, график заданной функции симметричен относительно начала координат, поэтому сначала строим график в правой части плоскости и отображаем полученную часть графика в левую полуплоскость симметрично началу координат. Получаем эскиз графика, изображенный на рисунке 9.

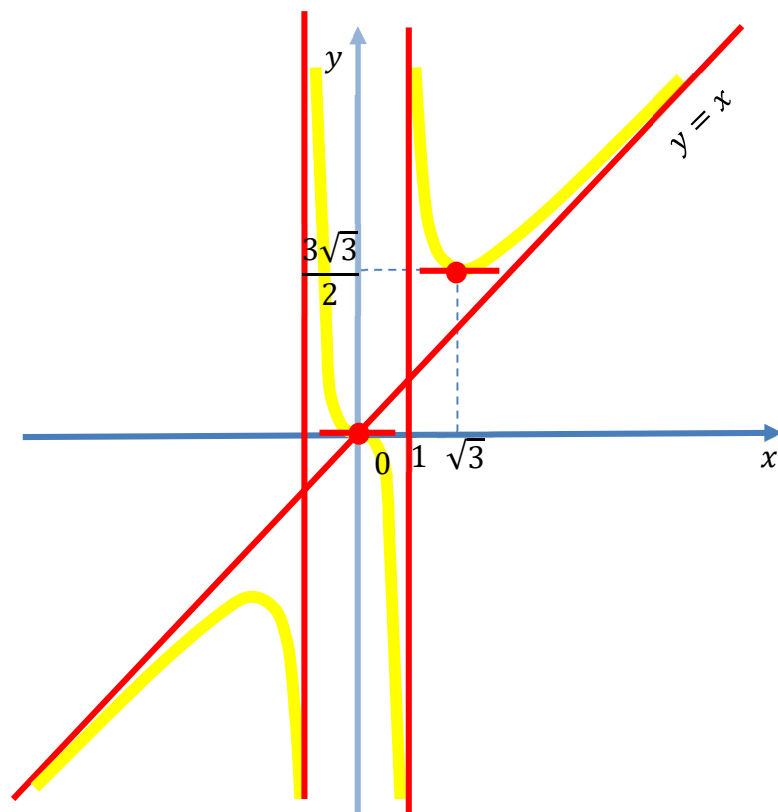


Рис. 9.

Для контроля построим график этой же функции с помощью компьютерной программы (Рис. 10).

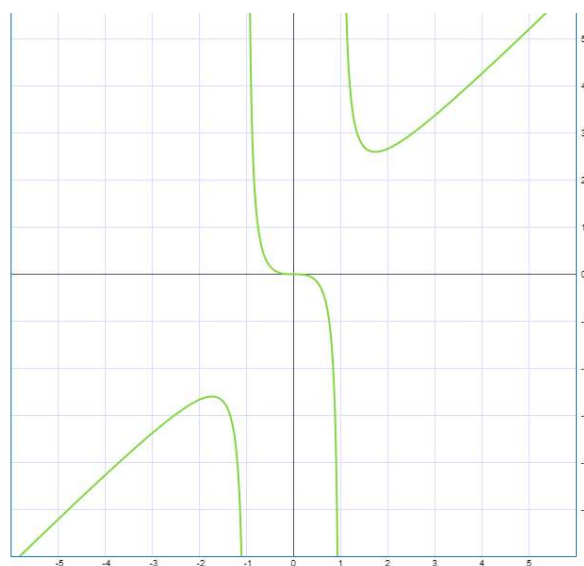


Рис. 10.

