ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский
политехнический университет
Петра Великого

Раздел № 01 Л и н е й н а я а л г е б р а

Тема № 03 Матрицы и операции с ними

Практическое занятие № 03

**Учебные вопросы:**

1. Линейные операции с матрицами.
2. Умножение матриц.
3. Обратная матрица. Два способа вычисления.
4. Матричные уравнения.

Литература


1. Сборник задач по математике в четырех частях. Под общей редакцией А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича
2. Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики.
3. А.Е. Умнов. Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

## Решение задач

### Задача 1

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -3 & 0\\ 0 & 5 & -7 & 4\\ 2 & 3 & -1 & 1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 3 & -2\\ 5 & 6 & 7 & -4\\ 1 & 9 & 8 & -6\end{pmatrix}.$$

Вычислить матрицу $C=3A-2B$.

Решение.

Линейные операции с матрицами можно записать следующим образом:

$$A_{m\times n}=(a_{ij}),\qquad B_{m\times n}=(b_{ij}),\qquad \forall\alpha,\beta\in R,\ \ C_{m\times n}=\alpha A+\beta B=(c_{ij})\quad\Rightarrow\quad c_{ij}=\alpha a_{ij}+\beta b_{ij}.$$

Поэтому

$$C=3A-2B=3\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & -3 & 0\\ 0 & 5 & -7 & 4\\ 2 & 3 & -1 & 1\end{pmatrix}+(-2)\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 3 & -2\\ 5 & 6 & 7 & -4\\ 1 & 9 & 8 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -3 & -9 & 0\\ 0 & 15 & -21 & 12\\ 6 & 9 & -3 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -2 & -6 & 4\\ -10 & -12 & -14 & 8\\ -2 & -18 & -16 & 12\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3+0 & -3-2 & -9-6 & 0+4\\ 0-10 & 15-12 & -21-14 & 12+8\\ 6-2 & 9-18 & -3-16 & 3+12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -5 & -15 & 4\\ -10 & 3 & -35 & 20\\ 4 & -9 & -19 & 15\end{pmatrix}.$$

### Задача 2

$$C=AB=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1 & 0 & 5\\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3\\ 2 & -1 & 3 & 4 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

**1**. Найти размер матрицы $C$.

**2**. Вычислить элементы $c_{31}, c_{42}$.

**3**. Вычислить строку $C_{2*}$, столбец $C_{*3}$.

Решение.

Произведением матрицы $A$ размера $m\times k$ на матрицу $B$ размера $k\times n$ называется матрица $C$ размера $m\times n$, элемент которой $c_{ij}$, стоящий в $i$-ой строке и в $j$-ом столбце, равен сумме произведений соответствующих элементов $i$-ой строки матрицы $A$ и $j$-ого столбца матрицы $B$:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ik}b_{kj}=\sum_{\mu=1}^{k}a_{i\mu}b_{\mu j}$$

Чтобы найти элемент $c_{ij}$ нужно умножить $i$-ю строку матрицы $A$, которая записана слева, на $j$-й столбец матрицы B, записанной в произведении справа.

Это также можно записать следующим образом:

$A_{m\times k}\cdot B_{k\times n}=C_{m\times n}$;.   $[m\times k]\cdot[k\times n]=[m\times n]$;

$A=(a_{ij}),\qquad B=(b_{ij}),\qquad C=(c_{ij})\quad\Rightarrow\quad c_{ij}=(A_{i*},B_{*j})=A_{i*}\cdot B_{*j};$

$C_{i*}=A_{i*}\cdot B,\qquad C_{*j}=A\cdot B_{*j},$

$A_{i*}$ – i – я строка матрицы $A$, $B_{*j}$ – j – й столбец матрицы $B$, ( , ) – скалярное произведение строки на столбец.

Поэтому

**1.** $[4\times 5]\cdot[5\times 3]=[4\times 3]$.

**2.** $$c_{31}=(A_{3*},B_{*1})=(2\quad -1\quad 3\quad 4\quad 0)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\\-1\end{pmatrix}=2\cdot 1+(-1)\cdot 0+3\cdot 1+4\cdot 1+0\cdot(-1)=9.$$

$$c_{42}=(A_{4*},B_{*2})=(1\quad 0\quad 1\quad 1\quad -1)\cdot(-1\quad 1\quad 0\quad 1\quad 1)^T=-1.$$

**3.**

$$C_{2*}=A_{2*}\cdot B=(0\quad 1\quad 2\quad -1\quad 3)\cdot\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&1\\1&0&1\\1&1&1\\-1&1&-1\end{pmatrix}=(2-1-3\qquad 1-1+3\qquad 1+2-1-3)=(-2\quad 3\quad -1).$$

$$C_{*3}=A\cdot B_{*3}=\begin{pmatrix}1&-2&-1&0&5\\0&1&2&-1&3\\2&-1&3&4&0\\1&0&1&1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2-1-5\\1+2-1-3\\-1+3+4\\1+1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\-1\\6\\3\end{pmatrix}.$$

**Задача 3**

Вычислить произведение матриц

$$\begin{pmatrix}1&-1&-3&2\\9&5&-7&4\\2&1&8&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&3\\0&1\\1&-4\\-5&0\end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\begin{pmatrix}1&-1&-3&2\\9&5&-7&4\\2&1&8&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&3\\0&1\\1&-4\\-5&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot(-2)+(-1)\cdot 0+(-3)\cdot 1+2\cdot(-5) & 1\cdot 3+(-1)\cdot 1+(-3)\cdot(-4)+2\cdot 0\\ 9\cdot(-2)+5\cdot 0+(-7)\cdot 1+4\cdot(-5) & 9\cdot 3+5\cdot 1+(-7)\cdot(-4)+4\cdot 0\\ 2\cdot(-2)+1\cdot 0+8\cdot 1+6\cdot(-5) & 2\cdot 3+1\cdot 1+8\cdot(-4)+6\cdot 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-2-3-10 & 3-1+12\\-18-7-20 & 27+5+28\\-4+8-30 & 6+1-32\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-15&14\\-45&60\\-26&-25\end{pmatrix}.$$

**Задача 4**
Проверить обратимость матрицы. Найти обратную матрицу двумя способами:
**1)** через присоединенную матрицу,
**2)** методом элементарных преобразований.
Выполнить проверку.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix}=-2\neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists A^{-1}. \quad A^{-1}=\frac{A^V}{\det A}, \quad A^V=\left(A_{ij}\right)^T.$$

**1)** Посчитаем обратную матрицу через присоединенную.

$$A^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{pmatrix}^T=\|\ (*)\ \|=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -2 & -2\\ -3 & 1 & 1\\ 5 & -1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 3/2 & -1/2 & -1/2\\ -5/2 & 1/2 & 3/2\end{pmatrix}.$$

(*) Считаем алгебраические дополнения по строкам, а **записываем в столбцы**:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=4, \quad A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=-\begin{vmatrix}2 & 0\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-2, \quad A_{31}=(-1)^{3+1}M_{31}=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2,$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-3, \quad A_{22}=(-1)^{2+2}M_{22}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1, \quad A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}=1,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=5, \quad A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-1, \quad A_{33}=(-1)^{3+3}M_{33}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-3.$$

Проверка:

$$A^{-1}\cdot A=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -2 & -2\\ -3 & 1 & 1\\ 5 & -1 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4-4-2 & 8-2-6 & 2-2\\ -3+2+1 & -6+1+3 & -1+1\\ 5-2-3 & 10-1-9 & 1-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

**2)** Посчитаем обратную матрицу методом элементарных преобразований.
К матрице приписываем как расширение единичную матрицу того же размера и делаем элементарные преобразования со строками в расширенной матрице до тех пор, пока на месте исходной матрицы не получится единичная матрица.
Тогда на месте единичной матрицы будет обратная матрица: $(A|E)\sim\ldots\sim(E|A^{-1})$.

$$(A|E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\sim\begin{bmatrix}I\times(-2)+II\\ I\times(-1)+III\end{bmatrix}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & -1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)\sim\left[III\times 3+II\right]\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -5 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)\sim\left[III\leftrightarrow II\right]\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2 & -5 & 1 & 3\end{array}\right)\sim\left[II\times(-2)+I\right]\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -2 & 3 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2 & -5 & 1 & 3\end{array}\right)\sim[III+I]\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2 & -5 & 1 & 3\end{array}\right)\sim[III\div 2]\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -5/2 & 1/2 & 3/2\end{array}\right)\sim[III\times(-1)+II]\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 3/2 & -1/2 & -1/2\\ 0 & 0 & 1 & -5/2 & 1/2 & 3/2\end{array}\right)=(E|A^{-1}).$$

Получили ту же самую обратную матрицу, что и в предыдущем пункте.

**Задача 5**

Решить матричное уравнение. Выполнить проверку решения.

$$\begin{pmatrix}3 & -1\\ 5 & -2\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & -8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -16\\ 5 & -15\end{pmatrix}.$$

Решение.

Запишем это уравнение следующим образом:

$$A\cdot X\cdot B=C,\quad A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 5 & -2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & -8\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}6 & -16\\ 5 & -15\end{pmatrix}.$$

Если матрицы $A$ и $B$ невырожденные, тогда решение этого уравнения существует и $X=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}$.

Проверим обратимость указанных матриц:

$$\det A=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 5 & -2\end{vmatrix}=-6+5=-1\neq 0,\ \det B=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & -8\end{vmatrix}=-8+3=-5\neq 0.$$

Найдем обратные матрицы разными способами, а именно:

для матрицы $A$ – методом элементарных преобразований,

для матрицы $B$ – через присоединенную матрицу.

$$(A|E)=\left(\begin{array}{cc|cc}3 & -1 & 1 & 0\\ 5 & -2 & 0 & 1\end{array}\right)\sim[I\times(-2)+II]\sim\left(\begin{array}{cc|cc}3 & -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -2 & 1\end{array}\right)\sim[I\leftrightarrow II]\sim\left(\begin{array}{cc|cc}-1 & 0 & -2 & 1\\ 3 & -1 & 1 & 0\end{array}\right)\sim$$

$$\sim[I\times 3+II]\sim\left(\begin{array}{cc|cc}-1 & 0 & -2 & 1\\ 0 & -1 & -5 & 3\end{array}\right)\sim\begin{bmatrix}I\times(-1)\\ II\times(-1)\end{bmatrix}\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 5 & -3\end{array}\right)=(E|A^{-1})\ \Rightarrow\ A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 5 & -3\end{pmatrix}.$$

$$B^{-1}=\frac{B^V}{\det B}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}^T=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}B_{11} & B_{21}\\ B_{12} & B_{22}\end{pmatrix}=\|\ (**)\ \|-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-8 & 1\\ -3 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}8 & -1\\ 3 & -1\end{pmatrix}.$$

$$(**)\ \ B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & -8\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \begin{array}{ll}B_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=-8, & B_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=1,\\ B_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-3, & B_{22}=(-1)^{2+2}M_{22}=1.\end{array}$$

Таким образом,

$$X=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 5 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6 & -16\\ 5 & -15\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{5}\begin{pmatrix}8 & -1\\ 3 & -1\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\left(\begin{pmatrix}2 & -1\\ 5 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6 & -16\\ 5 & -15\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}8 & -1\\ 3 & -1\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}12-5 & -32+15\\ 30-15 & -80+45\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8 & -1\\ 3 & -1\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}7 & -17\\ 15 & -35\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8 & -1\\ 3 & -1\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}56-51 & -7+17\\ 120-105 & -15+35\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5 & 10\\ 15 & 20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad X=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}.$$

Проверка.

Проверим исходное уравнение $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -16 \\ 5 & -15 \end{pmatrix}$.

Подставим в это равенство $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -8 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+6 & -1-16 \\ 3+12 & -3-32 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -17 \\ 15 & -35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21-15 & -51+35 \\ 35-30 & -85+70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -16 \\ 5 & -15 \end{pmatrix}.$$

В проверке умножение матриц выполнили в порядке $A \cdot (X \cdot B) = C$.

Проверьте свойство ассоциативности умножения матриц, т. е. убедитесь, что $(A \cdot X) \cdot B = C$.

**Дополнительные вопросы.**

**1)** Дано: определитель матрицы $A_{n \times n}$ равен $(-5)$. Чему равен определитель матрицы $B = 6A$ ?

Ответ: $\det B = 6^n \cdot \det A = -5 \cdot 6^n$.

**2)** Из курса лекций известно, что для квадратных матриц одного размера выполняется свойство: $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Но тогда, очевидно, что и $\det(B \cdot A) = \det(B) \cdot \det(A) = \det(A) \cdot \det(B) = \det(A \cdot B)$.

Верно ли, что отсюда следует равенство $B \cdot A = A \cdot B$ ?

Приведите пример.

Ответ: не верно.

Пример.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-3 & 6+4 \\ -7-6 & 14+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 10 \\ -13 & 22 \end{pmatrix}, \quad \det A = -6+7 = 1, \quad \det B = 4-6 = -2,$$

$$\det(A \cdot B) = -132 + 130 = -2, \quad \Rightarrow \quad \det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B);$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+14 & 1-4 \\ 9-28 & -3+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -3 \\ -19 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\det(B \cdot A) = 55 - 57 = -2 = \det(B) \cdot \det(A),$$

$$\Rightarrow \quad \det(B \cdot A) = \det(A \cdot B).$$

При этом очевидно, что $\begin{pmatrix} 11 & -3 \\ -19 & 5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -6 & 10 \\ -13 & 22 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad B \cdot A \neq A \cdot B.$

**Разработал старший преподаватель кафедры высшей математики Н. В. Петрова.**