Раздел № 1 Л и н е й н а я   а л г е б р а

Тема № 5 Метод Гаусса решения систем линейных

алгебраических уравнений

Практическое занятие № 5

Учебные вопросы:

1. Три способа решения системы линейных уравнений с квадратной невырожденной матрицей.
2. Метод Гаусса для определённой системы линейных уравнений.
3. Метод Гаусса для неопределённой системы линейных уравнений.

Литература

1. Сборник задач по математике в четырех частях. Под общей редакцией А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича
2. Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики.
3. А.Е. Умнов. Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

Решение задач

Напомним необходимые для решения задач сведения.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (1) \quad \Leftrightarrow \quad A_{m\times n} \cdot X_{n\times 1} = B_{m\times 1} \quad (2).$$

Вид (1) системы называется **скалярным**, а (2) – **матричным**.

Если столбец свободных членов системы есть нулевой столбец, то такая система называется **однородной** системой линейных алгебраических уравнений – **ОСЛАУ**, во всех остальных случаях система называется **неоднородной** системой линейных алгебраических уравнений – **НСЛАУ**.

Система называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение, и **несовместной**, если у системы не существует решений.

Определённая система – это система, имеющая единственное решение.

Неопределённая система – это система, имеющая бесконечное множество решений.

Если основная матрица системы квадратная и невырожденная, для решения системы применима **теорема Крамера**:

$$A_{n\times n}X_{n\times 1} = B_{n\times 1} \quad (3), \quad \Delta = \det A \neq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists! X.$$

При этом компоненты столбца X находятся по правилу: $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta} \quad \forall i \in \overline{1,n}$, где Δ_i получается из Δ заменой $i-$ того столбца на столбец $B_{n\times 1}$.

Матричный метод

Если матрица A невырожденная, тогда решение матричного уравнения (3) существует, причём единственное, и $X = A^{-1} \cdot B$.

Теорема Кронекера – Капелли (Совместность или существование решения)

Рассмотрим НСЛАУ общего вида

$$A_{m\times n}X_{n\times 1} = B_{m\times 1}, \qquad r = rangA, \qquad r_1 = rang\left(A \middle| B\right).$$

Имеет место **критерий** существования решения НСЛАУ:

$$AX = B, \quad \exists X \quad \Leftrightarrow \quad r = r_1.$$

Следствия

1. $r = r_1 = n \quad \Leftrightarrow \quad \exists! X$, т.е. система **определённая**.

2. $r = r_1 < n \quad \Leftrightarrow \quad \exists$ бесконечное множество решений, т.е. НСЛАУ **неопределённая**.

Замечание.

Обратите внимание, что для **НСЛАУ** бывают только такие ответы:

1) НСЛАУ **несовместная**, т.е. не имеет решений ($r \ne r_1 \Leftrightarrow \overline{\exists}\ \ X$).

2) НСЛАУ имеет единственное решение ($r = r_1 = n \Leftrightarrow \exists! X$).

Это – **определённая НСЛАУ.**

3) НСЛАУ имеет бесконечно много решений ($r = r_1 < n \Leftrightarrow \exists L(X)$).

Это – **неопределённая НСЛАУ**.

Также важно заметить, что **ОСЛАУ всегда совместна**, потому что у неё есть **тривиальное решение** – столбец, состоящий из всех нулей.

Задача 1

Решить систему методом Крамера, методом Гаусса, методом обратной матрицы.

Выполнить проверку в матричном виде.

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -3. \end{cases}$$

Решение.

Запишем систему в матричном виде

$$AX = B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & -2 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

1. Метод Крамера.

Составим и посчитаем определители по теореме Крамера.

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & -2 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -5 \ne 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists! X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_1/\Delta \\ \Delta_2/\Delta \\ \Delta_3/\Delta \end{pmatrix}.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -4 & -3 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -5, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 6 & -1 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -10, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -3 & -4 \\ 6 & -2 & -1 \\ 5 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 5 \quad \Rightarrow \quad X = \begin{pmatrix} -5/(-5) \\ -10/(-5) \\ 5/(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Проверка.

$$AX = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & -2 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-6-2 \\ 6-4-3 \\ 5-6-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = B.$$

2. Метод Гаусса.

Составим расширенную матрицу системы, выполним элементарные преобразование со строками матрицы, не переставляя столбцы.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 2 & -4 \\ 6 & -2 & 3 & -1 \\ 5 & -3 & 2 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Полученная матрица – матрица **равносильной НСЛАУ**, решение которой легко найти, читая и удовлетворяя уравнения снизу:

$$\begin{cases} 1\cdot x_3 = -1, \\ 1\cdot x_2 + 1\cdot x_3 = 1, \\ 1\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 1\cdot x_3 = 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = -1, \\ x_2 = 1 - x_3 = 1-(-1) = 2, \\ x_1 = 2 - x_2 - x_3 = 2-2+1 = 1. \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3. Матричный метод.

Поскольку матрица A невырожденная, как мы убедились в методе Крамера, решение матричного уравнения (3) существует, причём единственное, и $X = A^{-1}\cdot B$.

Посчитаем обратную матрицу любым изученным методом и выполним соответсвующее умножение матрицы на столбец:

$$A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 3 & -2 & 0 \\ -8 & -3 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow X = A^{-1}\cdot B = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 3 & -2 & 0 \\ -8 & -3 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} = \begin{pmatrix} -20+15 \\ -12+2 \\ 32+3-30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Задача 2

Решить систему методом Гаусса.

Проверить в матричном виде.

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ -x_1 + x_3 + 3x_4 = -2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 9x_4 = 6. \end{cases}$$

Решение.

Составим расширенную матрицу системы, выполним элементарные преобразование со строками матрицы, не переставляя столбцы.

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & 9 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r = r_1 = n = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \exists! X$, т.е. система определённая.

Находим решение НСЛАУ по полученной подобной матрице:

$$\begin{cases} 1\cdot x_4 = 0, \\ 1\cdot x_3 + 6\cdot x_4 = -1, \\ 2\cdot x_2 + 3\cdot x_3 + 4\cdot x_4 = 1, \\ 1\cdot x_1 + 0\cdot x_2 - 1\cdot x_3 + 1\cdot x_4 = 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_4 = 0, \\ x_3 = -1, \\ x_2 = 2, \\ x_1 = 1. \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Проверка.

Замечание.

Проверку необходимо делать для исходной матрицы, а не для полученной элементарными преобразованиями подобной матрицы.

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 \\ 4-3 \\ 2+2+1-1-1 \\ -1-1 \\ 2+6-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = B.$$

Замечание.

В дальнейшем для СЛАУ будем писать сразу расширенную матрицу системы.

Скалярный вид системы писать не будем.

Задача 3

Решить систему $AX = B$ методом Гаусса, если дана расширенная матрица системы.

Решение.

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 5 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$r = 3, \quad r_1 = 4, \quad r \neq r_1 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\exists} \; X$, т.е. система несовместная.

Это же получается, если прочитать последнее уравнение равносильной НСЛАУ:

$0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 = 1.$

Очевидно, что это уравнение не имеет решения. Следовательно, исходная НСЛАУ не имеет решений, т.е. несовместная.

Задача 4

Решить систему $AX = B$ методом Гаусса, если дана расширенная матрица системы.

Проверить в матричном виде.

Решение.

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 6 & -3 & -5 & 1 & 7 \\ 1 & 8 & -10 & -2 & 10 & 8 \\ 2 & 18 & -27 & -1 & 29 & 17 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 6 & -3 & -5 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & -7 & 3 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

$r = rangA = 2, \quad r_1 = rang(A|B) = 2 \;\Rightarrow\; r = r_1 \;\Leftrightarrow\; \exists X.$

$n = 5 \;\Rightarrow\; r < n \;\Rightarrow \exists k = n - r = 5 - 2 = 3.$

Система совместная, имеет бесконечное множество решений, следовательно, эта система неопределённая.

Две переменные ($r = rangA = 2$) будут базисные, а три оставшиеся ($k = n - r = 3$) будут свободные, т.е. произвольные. Следовательно, бесконечное множество решений заданной НСЛАУ будет зависеть от трёх произвольных констант, т.е. $X = X(C_1, C_2, C_3)$.

Замечание.

Выбор переменных, которые будут базисные, не однозначен. Но количество базисных и свободных переменных зависит от ранга матрицы системы, поэтому определяется одним и тем же числом, не зависимо от выбора базисных переменных.

Решим систему, найдёт бесконечное множество столбцов, удовлетворяющих заданной системе.

1) Читаем последнее, ненулевое, уравнение: $2x_2 - 7x_3 + 3x_4 + 9x_5 = 1$.

Здесь четыре переменные в одном уравнении, следовательно, три (4 – 1 = 3) переменные свободные. Итак,

$$\left]\left[\begin{array}{l} x_3 = C_1 \\ x_4 = C_2 \\ x_5 = C_3 \end{array}\right.\right. \Rightarrow \quad X = X(C_1, C_2, C_3) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

2) Из второго уравнения имеем: $2x_2 - 7 \cdot C_1 + 3 \cdot C_2 + 9 \cdot C_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{7}{2}C_1 - \frac{3}{2}C_2 - \frac{9}{2}C_3 + \frac{1}{2}$.

3) Далее подставляем x_2, x_3, x_4, x_5 в первое уравнение, считаем x_1, получаем полностью решение НСЛАУ:

$$x_1 + 6x_2 - 3x_3 - 5x_4 + x_5 = 7 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 7 - 6 \cdot \left(\frac{7}{2}C_1 - \frac{3}{2}C_2 - \frac{9}{2}C_3 + \frac{1}{2} \right) + 3 \cdot C_1 + 5 \cdot C_2 - C_3 \quad \Rightarrow$$

$$X = X(C_1, C_2, C_3) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18C_1 + 14C_2 + 26C_3 + 4 \\ \frac{7}{2}C_1 - \frac{3}{2}C_2 - \frac{9}{2}C_3 + \frac{1}{2} \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}.$$

Полученное таким образом решение называется **общим решением** НСЛАУ.

Для проверки выберем произвольное, так называемое **частное решение**, из этого множества, придавая константам фиксированные значения.

Сделаем это для двух частных решений.

Во-первых, проверим решение, когда все константы равны нулю.

А затем возьмём все константы отличные от нуля.

а) $X_{ч1} = X(0,\ \ 0,\ \ 0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; AX_{ч1} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 & -5 & 1 \\ 1 & 8 & -10 & -2 & 10 \\ 2 & 18 & -27 & -1 & 29 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+3 \\ 4+4 \\ 8+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 17 \end{pmatrix} = B.$

б) $X_{ч2} = X(2,-2,\ \ 2) = \begin{pmatrix} -36-28+52+4 \\ 7+3-9+1/2 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3/2 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \;\Rightarrow$

$$AX_{ч2} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 & -5 & 1 \\ 1 & 8 & -10 & -2 & 10 \\ 2 & 18 & -27 & -1 & 29 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 \\ 3/2 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8+9-6+10+2 \\ -8+12-20+4+20 \\ -16+27-54+2+58 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 17 \end{pmatrix} = B.$$

В заключение заметим, проверку можно сделать для общего решения $X(C_1, C_2, C_3)$, т. е. проверить равенство $A \cdot X(C_1, C_2, C_3) = B$, но обычно проверка делается для произвольно выбранных частных решений.

Задача 5

Решить систему $AX = B$ методом Гаусса, если дана расширенная матрица системы.

Решение.

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -5 & 0 & 8 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 7 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$r = rangA = 3, \quad r_1 = rang(A|B) = 3 \;\Rightarrow\; r = r_1 \;\Leftrightarrow\; \exists X$$
$$n = 5 \;\Rightarrow\; r < n \;\Rightarrow\; \exists L(X):\ \dim L(X) = k = n - r = 5 - 3 = 2 \;\Rightarrow\; X = X(C_1, C_2).$$

Система совместная и неопределённая**.**

1) Читаем последнее уравнение: $x_3 = 3$.

Следовательно, в этом уравнении, в отличие от предыдущей задачи, произвольные константы поставить нельзя. И переменная x_3 свободной быть не может.

2) Читаем следующее снизу уравнение: $3x_2 + x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 2$.

Здесь четыре переменные в одном уравнении, но одна переменная, x_3, уже не может быть произвольной. Следовательно, только две переменные (4 – 1 – 1 = 2) свободные, т.е. две компоненты в столбце решений нужно задать как C_1, C_2.

$$\left[\begin{array}{l} 3x_2 + x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 2, \\ \qquad\qquad x_3 = 3 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left.\right] \; x_4 = C_1, \;\; x_5 = C_2 \quad \Rightarrow \quad X = X(C_1, C_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ 3 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

Из второго уравнения имеем: $3x_2 + 1 \cdot 3 + 4 \cdot C_1 + 6 \cdot C_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -(4/3)C_1 - 2C_2 - 1/3.$

3) Далее подставляем полученные компоненты в первое уравнение, находим из него x_1 и получаем общее решение НСЛАУ:

$$2x_1 - x_2 - 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad X = X(C_1, C_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1/3)C_1 - (3/2)C_2 + 13/3 \\ x_2 = -(4/3)C_1 - 2C_2 - 1/3. \\ 3 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

Разработал старший преподаватель кафедры высшей математики Н. В. Петрова.