

Раздел № 01 Линейная алгебра

Тема № 06 Однородные линейные системы.

Собственные числа и собственные векторы
квадратной матрицы

Практическое занятие № 06

Учебные вопросы:

1. Однородные системы линейных алгебраических уравнений. Структура общего решения.
2. Структура общего решения неоднородной системы линейных алгебраических уравнений.
3. Собственные числа и собственные векторы квадратной матрицы.

Литература

1. Сборник задач по математике в четырех частях.
Под общей редакцией А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича
2. Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики.
3. А.Е. Умнов. Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

Решение задач

На предыдущем практическом занятии было замечено, что однородная система линейных алгебраических уравнений (ОСЛАУ) всегда совместна, потому что у неё есть тривиальное решение – столбец, состоящий из всех нулей.

Далее было показано, что согласно теореме Кронекера-Капелли ОСЛАУ может иметь либо единственное решение, – тогда это тривиальное решение определённой ОСЛАУ, либо бесконечное множество решений, – тогда это общее решение неопределённой ОСЛАУ.

На лекциях в дальнейшем был установлен важнейший факт для этого бесконечного множества решений, а именно структура общего решения ОСЛАУ, которое обозначается обычно X_{OO} .

Решения неопределённой ОСЛАУ образуют линейное подпространство $L(X)$ исходного пространства размерности $\dim L(X) = k = n - r$.

И в подпространстве $L(X) \exists X_1, X_2, \dots, X_k$ – **линейно независимые решения ОСЛАУ**, которые являются **базисом** этого подпространства или **фундаментальной системой решений ОСЛАУ – ФСР**. И тогда любое решение этой ОСЛАУ есть линейная комбинация базисных решений, т. е. имеет место **теорема о структуре общего решения ОСЛАУ**:

$$A_{m \times n} X_{n \times 1} = O, \quad r = \text{rang} A, \quad r < n, \quad k = n - r \quad \Rightarrow \quad \exists X_1, X_2, \dots, X_k \text{ – линейно независимые решения:} \\ X_{OO}(C_1, C_2, \dots, C_k) = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \dots + C_k X_k.$$

Такая форма записи общего решения является **базисной формой**.

Матрица $\Phi = (X_1 X_2 \dots X_k)$, составленная из упорядоченных столбцов базисных решений ОСЛАУ, называется **фундаментальной матрицей** пространства решений ОСЛАУ. Общее решение можно записать через эту матрицу, а именно:

$$X_{OO}(C_1, C_2, \dots, C_k) = (X_1 X_2 \dots X_k) \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_k \end{pmatrix} = \Phi \cdot C.$$

Для неоднородной системы с той же самой матрицей, что и в соответствующей однородной системе, имеет место **теорема о структуре общего решения НСЛАУ**:

общее решение совместной НСЛАУ есть сумма общего решения ОСЛАУ и некоторого частного решения НСЛАУ, т. е. $X_{OH}(C_1, C_2, \dots, C_k) = X_{OO}(C_1, C_2, \dots, C_k) + X_{OH}$.

Задача 1

Решить систему $AX = O$ методом Гаусса, если дана матрица системы.

1. Записать общее решение ОСЛАУ в двух формах:

- а) в базисной форме с целочисленными координатами базисных столбцов,
- б) через фундаментальную матрицу Φ пространства решений.

2. Выписать ФСР. Выполнить проверку базисных решений ОСЛАУ.

Решение.

Заметим, что для выполнения элементарных преобразований для ОСЛАУ не имеет смысла писать расширенную матрицу, приписывая столбец свободных членов, состоящий из одних нулей, поскольку при элементарных преобразованиях со строками расширенной матрицы, в последнем столбце все время будут находиться только нули.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -3 & 2 \\ 21 & 6 & -13 & -4 \\ 35 & 14 & -19 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 7 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$r = \text{rang} A = 2, \quad n = 4 \quad \Rightarrow \quad r < n \quad \Rightarrow \quad \exists L(X): \dim L(X) = k = n - r = 4 - 2 = 2 \quad \Rightarrow \quad X_{oo}(C_1, C_2).$$

1. Поскольку требуется найти базисные решения с целочисленными координатами, решим сначала систему с промежуточными произвольными константами $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$.

$$\left[\begin{array}{l} x_3 = \tilde{C}_1, \quad x_4 = \tilde{C}_2 \end{array} \right] \Rightarrow X_{oo}(\tilde{C}_1, \tilde{C}_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \tilde{C}_1 \\ \tilde{C}_2 \end{pmatrix}.$$

Из второго уравнения имеем:

$$3x_2 + 2\tilde{C}_1 + 5\tilde{C}_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{2}{3}\tilde{C}_1 - \frac{5}{3}\tilde{C}_2 \Rightarrow X_{oo}(\tilde{C}_1, \tilde{C}_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet \\ -\frac{2}{3}\tilde{C}_1 - \frac{5}{3}\tilde{C}_2 \\ \tilde{C}_1 \\ \tilde{C}_2 \end{pmatrix}.$$

Из первого уравнения

$$7x_1 + 4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\tilde{C}_1 - \frac{5}{3}\tilde{C}_2 \right) - 3\tilde{C}_1 + 2\tilde{C}_2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{17}{21}\tilde{C}_1 + \frac{2}{3}\tilde{C}_2 \Rightarrow$$

$$X_{oo}(\tilde{C}_1, \tilde{C}_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{21}\tilde{C}_1 + \frac{2}{3}\tilde{C}_2 \\ -\frac{2}{3}\tilde{C}_1 - \frac{5}{3}\tilde{C}_2 \\ \tilde{C}_1 \\ \tilde{C}_2 \end{pmatrix} = \frac{\tilde{C}_1}{21} \begin{pmatrix} 17 \\ -14 \\ 21 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\tilde{C}_2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

В силу произвольности констант $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ можно ввести новые произвольные константы так, чтобы базисные решения имели целочисленные координаты, а именно

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\tilde{C}_1}{21} = C_1 \\ \frac{\tilde{C}_2}{3} = C_2 \end{array} \right] \Rightarrow X_{oo}(C_1, C_2) = \begin{pmatrix} 17C_1 + 2C_2 \\ -14C_1 - 5C_2 \\ 21C_1 \\ 3C_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 17 \\ -14 \\ 21 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 2 \\ -14 & -5 \\ 21 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

2. Выпишем ФСР. И выполним проверку базисных решений.

$$X_1 = X_{oo}(1, 0) = \begin{pmatrix} 17 \\ -14 \\ 21 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = X_{oo}(0, 1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$AX_1 = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -3 & 2 \\ 21 & 6 & -13 & -4 \\ 35 & 14 & -19 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 \\ -14 \\ 21 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 119 - 56 - 63 \\ 357 - 84 - 273 \\ 595 - 196 - 399 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = O.$$

$$AX_2 = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -3 & 2 \\ 21 & 6 & -13 & -4 \\ 35 & 14 & -19 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 - 20 + 6 \\ 42 - 30 - 12 \\ 70 - 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = O.$$

Задача 2

Решить систему $AX = B$ методом Гаусса, если дана расширенная матрица системы.

1. Доказать совместность НСЛАУ.

Установить тип НСЛАУ в зависимости от множества решений.

2. Записать общее решение НСЛАУ в трёх формах:

а) по теореме о структуре общего решения НСЛАУ,

б) в базисной форме с целочисленными координатами базисных столбцов,

в) через фундаментальную матрицу Φ пространства решений ОСЛАУ.

3. Выписать ФСР. Выполнить проверку базисных решений ОСЛАУ.

4. Выполнить проверку полученного частного решения НСЛАУ $X_{\text{чн}}$.

Выполнить проверку произвольно выбранного*** решения $\tilde{X}_{\text{чн}}$.

***Все произвольные константы должны быть отличны от нуля.

Решение.

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 1 & -7 & 0 & 29 \\ 2 & 10 & -4 & -7 & 4 & -19 \\ 4 & 2 & 7 & -14 & -4 & 106 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 1 & -7 & 0 & 29 \\ 0 & 6 & -5 & 0 & 4 & -48 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

1.

$$r = \text{rang} A = 2, \quad r_1 = \text{rang}(A|B) = 2 \Rightarrow r = r_1 \Leftrightarrow \exists X.$$

$$n = 5 \Rightarrow r < n \Rightarrow \exists L(X): \dim L(X) = k = n - r = 5 - 2 = 3 \Rightarrow X_{\text{OH}}(C_1, C_2, C_3).$$

Система совместная и неопределённая.

2. Для того чтобы не вводить промежуточные константы, предусмотрим деление на коэффициент перед той переменной, которую будем искать из уравнения. Делать так будем на каждом шаге решения.

$$1) 6x_2 - 5x_3 + 4x_5 = -48 \Rightarrow] x_3 = 6C_1, x_5 = 3C_2 \Rightarrow 6x_2 - 30C_1 + 12C_2 = -48 \Rightarrow$$

$$X_{\text{OH}}(C_1, C_2, C_3) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ 6C_1 \\ \bullet \\ 3C_2 \end{pmatrix} \Rightarrow X_{\text{OH}}(C_1, C_2, C_3) = \begin{pmatrix} \bullet \\ 5C_1 - 2C_2 - 8 \\ 6C_1 \\ \bullet \\ 3C_2 \end{pmatrix}.$$

$$2) 2x_1 + 4x_2 + x_3 - 7x_4 = 29 \Rightarrow 2x_1 + 26C_1 - 8C_2 - 7x_4 = 61 \Rightarrow] x_4 = 2C_3 \Rightarrow$$

$$X_{\text{OH}}(C_1, C_2, C_3) = \begin{pmatrix} \bullet \\ 5C_1 - 2C_2 - 8 \\ 6C_1 \\ 2C_3 \\ 3C_2 \end{pmatrix} \Rightarrow X_{\text{OH}}(C_1, C_2, C_3) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13C_1 + 4C_2 + 7C_3 + 61/2 \\ 5C_1 - 2C_2 - 8 \\ 6C_1 \\ 2C_3 \\ 3C_2 \end{pmatrix}.$$

$$X_{OH}(C_1, C_2, C_3) \stackrel{a)}{=} X_{OO}(C_1, C_2, C_3) + X_{qH} \stackrel{a)}{=} \begin{pmatrix} -13C_1 + 4C_2 + 7C_3 \\ 5C_1 - 2C_2 \\ 6C_1 \\ 2C_3 \\ 3C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 61/2 \\ -8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{\delta)}{=} C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3 + X_{qH} \stackrel{\delta)}{=} \\ \stackrel{\delta)}{=} C_1 \begin{pmatrix} -13 \\ 5 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 61/2 \\ -8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{\delta)}{=} \Phi C + X_{qH} \stackrel{\delta)}{=} \begin{pmatrix} -13 & 4 & 7 \\ 5 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 61/2 \\ -8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. ФСР ОСЛАУ:

$$X_{OO}(C_1, C_2, C_3) = \begin{pmatrix} -13C_1 + 4C_2 + 7C_3 \\ 5C_1 - 2C_2 \\ 6C_1 \\ 2C_3 \\ 3C_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ X_1 = X_{OO}(1, 0, 0) = \begin{pmatrix} -13 \\ 5 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = X_{OO}(0, 1, 0) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad X_3 = X_{OO}(0, 0, 1) = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$AX_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & -7 & 0 \\ 2 & 10 & -4 & -7 & 4 \\ 4 & 2 & 7 & -14 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -13 \\ 5 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26 + 20 + 6 \\ -26 + 50 - 24 \\ -52 + 10 + 42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = O.$$

$$AX_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & -7 & 0 \\ 2 & 10 & -4 & -7 & 4 \\ 4 & 2 & 7 & -14 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 - 8 \\ 8 - 20 + 12 \\ 16 - 4 - 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = O.$$

$$AX_3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & -7 & 0 \\ 2 & 10 & -4 & -7 & 4 \\ 4 & 2 & 7 & -14 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 - 14 \\ 14 - 14 \\ 28 - 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = O.$$

4. Выполним проверку частных решений НСЛАУ.

$$X_{\text{чн}} = \begin{pmatrix} 61/2 \\ -8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow AX_{\text{чн}} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & -7 & 0 \\ 2 & 10 & -4 & -7 & 4 \\ 4 & 2 & 7 & -14 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 61/2 \\ -8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 61-32 \\ 61-80 \\ 122-16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ -19 \\ 106 \end{pmatrix} = B.$$

$$\tilde{X}_{\text{чн}} = X_{\text{он}}(1/2, -1, -1) = \begin{pmatrix} -13/2 - 4 - 7 + 61/2 \\ 5/2 + 2 - 8 \\ 3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -7/2 \\ 3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A\tilde{X}_{\text{чн}} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & -7 & 0 \\ 2 & 10 & -4 & -7 & 4 \\ 4 & 2 & 7 & -14 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ -7/2 \\ 3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26-14+3+14 \\ 26-35-12+14-12 \\ 52-7+21+28+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ -19 \\ 106 \end{pmatrix} = B.$$

Задача 3

При каком значении параметра λ квадратная однородная система линейных алгебраических уравнений, матрица коэффициентов которой A , имеет ненулевое решение?

Указать хотя бы одно ненулевое решение ОСЛАУ с этой матрицей.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -2 \\ 1 & \lambda & 2 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Используем доказанную в лекциях теорему.

Для того чтобы ОСЛАУ с квадратной матрицей имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель матрицы системы был равен нулю.

$$\det A = 2\lambda^2 + 12\lambda + 10 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -5, \lambda_2 = -1.$$

Найдём ненулевые решение ОСЛАУ $AX = O$.

$$1) \lambda_1 = -5 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & -2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow n=3, r=2 \Rightarrow k=n-r=1 \Rightarrow$$

$$X_{\text{оо}}(C) = \begin{pmatrix} -C \\ C \\ 3C \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = CX_1. \text{ Ненулевых решений бесконечно много. В частности, ба-}$$

зисный столбец X_1 является ненулевым решением:

$$AX_1 = \begin{pmatrix} -5 & 1 & -2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+1-6 \\ -1-5+6 \\ -3-3+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = O.$$

$$2) \lambda_1 = -1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow n=3, r=2 \Rightarrow k=n-r=1 \Rightarrow$$

$$X_{oo}(C) = \begin{pmatrix} C \\ C \\ 0 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = C\tilde{X}_1. \text{ Ненулевых решений бесконечно много. В частности, базис-}$$

ный столбец $\tilde{X}_1$ является ненулевым решением:

$$A\tilde{X}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+1 \\ 1-1 \\ -3-3+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = O.$$

Перейдем теперь к важнейшему в математике понятию.

Собственные числа и собственные векторы квадратной матрицы.

Определение 1. Ненулевой вектор-столбец X называется собственным вектором квадратной матрицы A , если существует число $\lambda \in \mathbb{R}$, такое что $AX = \lambda X$. Это число λ называется собственным числом матрицы A , а вектор X — соответствующим ему собственным вектором.

Определение 2. Уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ называется характеристическим уравнением для матрицы A .

- Чтобы найти собственные числа матрицы A следует решить характеристическое уравнение. Это уравнение является алгебраическим уравнением степени n , где n — порядок матрицы A .

- Для нахождения собственных векторов, отвечающих найденным собственным числам, необходимо решить ОСЛАУ с нулевым определителем $\det(A - \lambda E)$ и выбрать ненулевые решения этой системы.

Задача 4

Найти собственные числа и собственные векторы матриц

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{в) } A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix} \quad \text{г) } A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

Решение.

$$\text{а) Составим матрицу } A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{pmatrix}.$$

Находим корни характеристического уравнения — с. ч.

$$\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5.$$

Найдём собственные векторы (с. в.) матрицы, т. е. найдём бесконечное множество решений ОСЛАУ $(A - \lambda E)X = O$. Будем обозначать базисные столбцы пространства решений отлично от ранее применяемых обозначений, а именно $U_1, U_2, U_3, \dots$

$$1) \lambda_1 = 1 \Rightarrow (A - 1 \cdot E)X = O.$$

Решаем методом Гаусса. Базисные столбцы находим с целочисленными координатами.

$$(A-E) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X_{oo}(C) = \begin{pmatrix} -C \\ C \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow U_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \text{собственный вектор} \leftrightarrow \lambda_1 = 1.$$

$$2) \lambda_2 = 5 \Rightarrow (A - 5 \cdot E)X = O.$$

$$(A - 5E) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X_{oo}(C) = \begin{pmatrix} C \\ 3C \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \text{собственный вектор} \leftrightarrow \lambda_2 = 5.$$

б) Составим матрицу $A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}.$

Находим с. ч.: $\det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1.$

Найдём с. в. матрицы.

$$1) \lambda_1 = 0 \Rightarrow (A - 0 \cdot E)X = O.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X_{oo}(C) = \begin{pmatrix} C \\ 0 \\ C \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \lambda_1 = 0.$$

$$2) \lambda_2 = 2 \Rightarrow (A - 2 \cdot E)X = O.$$

$$(A - 2E) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X_{oo}(C) = \begin{pmatrix} 3C \\ -2C \\ C \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow U_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \lambda_2 = 2.$$

$$3) \lambda_3 = -1 \Rightarrow (A + 1 \cdot E)X = O.$$

$$(A + E) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X_{oo}(C) = \begin{pmatrix} 0 \\ C \\ -2C \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow U_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \lambda_3 = -1.$$

в) Составим матрицу $A - \lambda E = \begin{pmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{pmatrix}.$

Находим с. ч.: $\det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1(\text{кр.2}), \lambda_2 = -1.$

Найдём с. в. матрицы.

$$1) \lambda_1 = 1 \Rightarrow (A - 1 \cdot E)X = O.$$

$$(A - 1 \cdot E) = \begin{pmatrix} 6 & -12 & 6 \\ 10 & -20 & 10 \\ 12 & -24 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X_{oo}(C_1, C_2) = \begin{pmatrix} 2C_1 - C_2 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\{ U_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, U_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow \lambda_1 = 1.$$

$$2) \lambda_2 = -1 \Rightarrow (A + 1 \cdot E)X = O.$$

$$(A + E) = \begin{pmatrix} 8 & -12 & 6 \\ 10 & -18 & 10 \\ 12 & -24 & 14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X_{oo}(C) = \begin{pmatrix} 3C \\ 5C \\ 6C \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow U_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \leftrightarrow \lambda_2 = -1.$$

г) С. ч.

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 4-\lambda & -5 & 2 \\ 5 & -7-\lambda & 3 \\ 6 & -9 & 4-\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2(\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0(\text{кр.2}), \lambda_2 = 1.$$

С. в.

$$1) \lambda_1 = 0 \Rightarrow (A - 0 \cdot E)X = O.$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X_{oo}(C) = \begin{pmatrix} C \\ 2C \\ 3C \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \lambda_1 = 0.$$

$$2) \lambda_2 = 1 \Rightarrow (A - 1 \cdot E)X = O.$$

$$(A - E) = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 5 & -8 & 3 \\ 6 & -9 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X_{oo}(C) = \begin{pmatrix} C \\ C \\ C \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \lambda_2 = 1.$$

Замечание.

Из решения задачи 4 сделаем очень важный вывод.

- Для простого собственного числа, алгебраическая кратность которого, как корня характеристического уравнения, равна единице, число линейно независимых (базисных) собственных векторов всегда совпадает с алгебраической кратностью этого собственного числа, т. е. также равно единице.

- Для кратного собственного числа это не так. Число линейно независимых собственных векторов в этом случае может совпадать с алгебраической кратностью соответствующего собственного числа, а может оказаться меньше алгебраической кратности собственного числа. От чего это зависит и для чего является важным, разберём позже в курсе «Линейной алгебры».

Остаётся только сказать, что число линейно независимых собственных векторов, соответствующих собственному числу, называется геометрической кратностью этого собственного числа. Таким образом, у собственного числа есть алгебраическая и геометрическая кратность, и совпадение этих кратностей для собственных чисел играет важную роль в задачах линейной алгебры и многих приложений линейной алгебры.

Разработал старший преподаватель кафедры высшей математики Н. В. Петрова.