ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Раздел № 02 Векторная алгебра

Тема №07 Линейные операции с геометрическими векторами

Практическое занятие № 07

## Учебные вопросы:

1. Понятие геометрического вектора.
2. Линейные операции с геометрическими векторами.
3. Понятие коллинеарности и компланарности векторов.
4. Разложение вектора по данным векторам на прямой, на плоскости и в пространстве.

## Литература


1. Сборник задач по математике в четырёх частях. Под общей редакцией А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича
2. Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики.
3. А.Е. Умнов Аналитическая геометрия и линейная алгебра
4. Рябушко А.П. и др. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. Часть 1
5. П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 1

## Решение задач

*Замечание. Прежде чем переходить к решению задач стоит ознакомиться с лекцией 08 Линейное пространство геометрических векторов.*

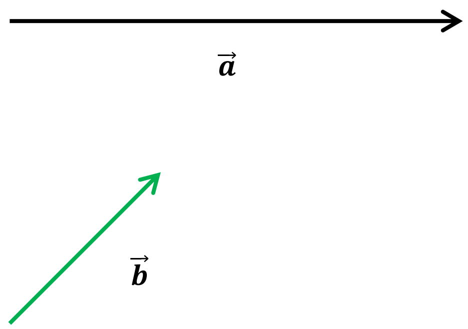
1. По данным неколлинеарным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ построить векторы:

   1. $\frac{1}{3}\vec{a}-2\vec{b}$;
   2. $2\vec{a}+\vec{b}$;
   3. $\frac{3}{4}(\vec{a}+2\vec{b})-\frac{1}{4}(\vec{a}-2\vec{b})-\vec{a}-\vec{b}$.

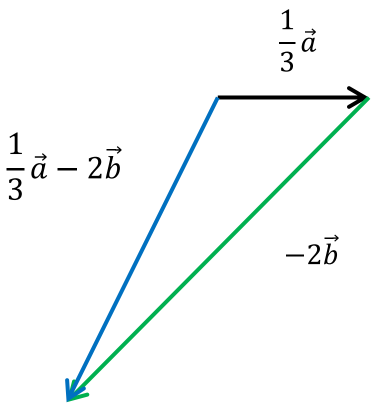
Решение.

*Прежде всего стоит заметить, что в задачах такого типа у каждого студента будет своё условие, так как нам заданы произвольные вектора, соответственно и картинка при решении каждого пункта у всех будет своя.*

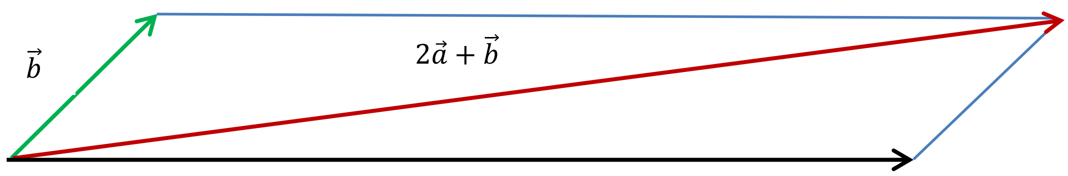
Построим два произвольных вектора на плоскости:




1. $\frac{1}{3}\vec{a}-2\vec{b}$. Для построения данного вектора можно воспользоваться правилом треугольника. Для этого из конца вектора $\frac{1}{3}\vec{a}$ построим вектор $-2\vec{b}$, а затем соединим начало вектора $\frac{1}{3}\vec{a}$ с концом вектора $-2\vec{b}$:



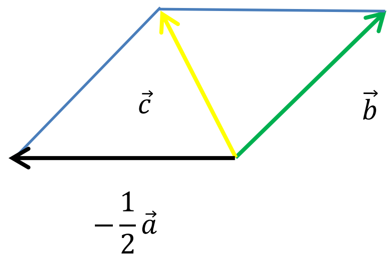

2. $2\vec{a}+\vec{b}$. Для построения данного вектора можно воспользоваться правилом параллелограмма. Для этого построим из одной точки вектора $2\vec{a}$ и $\vec{b}$. Достроим получившуюся фигуру до параллелограмма. Диагональ данного параллелограмма, идущая из точки являющейся началом и одного и второго вектора, содержит искомый вектор:




3. $\frac{3}{4}(\vec{a}+2\vec{b})-\frac{1}{4}(\vec{a}-2\vec{b})-\vec{a}-\vec{b}$. Для построения этого вектора необходимо упростить данное выражение:

$\frac{3}{4}(\vec{a}+2\vec{b})-\frac{1}{4}(\vec{a}-2\vec{b})-\vec{a}-\vec{b}=\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}-\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{a}-\vec{b}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}.$

Для построения полученного вектора вновь воспользуемся правилом параллелограмма. Для этого проведём из одной точки вектор $\vec{b}$ и $-\frac{1}{2}\vec{a}$. Достроим получившуюся фигуру до параллелограмма. Диагональ данного параллелограмма, которая содержит точку начала этих векторов содержит наш результирующий вектор:

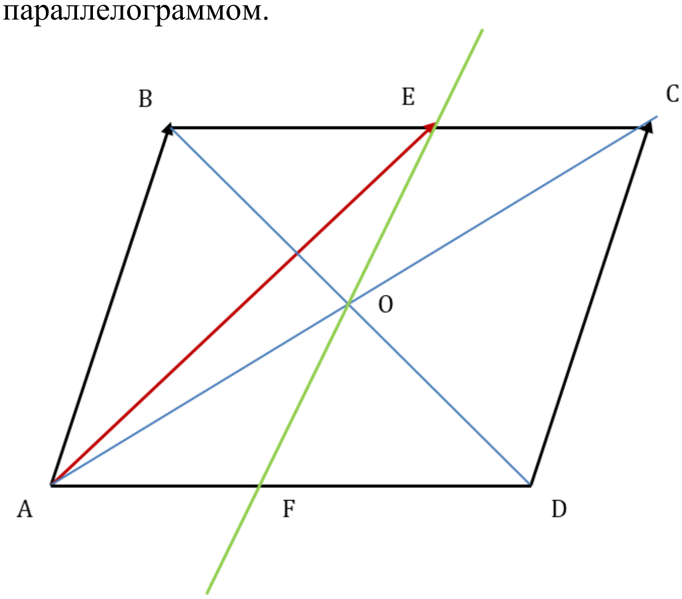



2. В четырёхугольнике $ABCD$ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. Через точку $O$ пересечения его диагоналей проведена прямая, пересекающая стороны $BC$ и $AD$ соответственно в точках $E$ и $F$. Какие из векторов $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{EC}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{DF}$:

- коллинеарны
- сонаправлены
- противоположно направлены
- равны
- имеют равные длины?

Решение.

Построим чертёж, иллюстрирующий условие задачи. Так как по условию задачи $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, следовательно, стороны $AB$ и $CD$ нашего четырёхугольника параллельны и равны, а это значит, что по признаку параллелограмма наш четырёхугольник является параллелограммом.



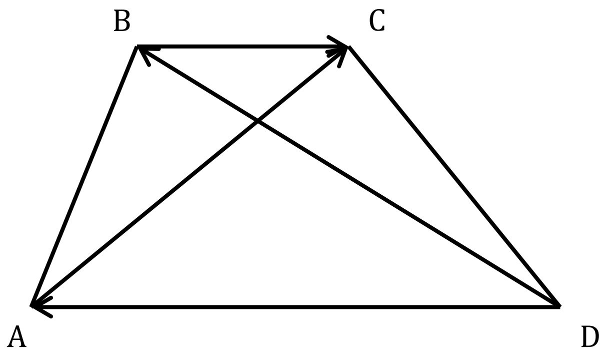

- коллинеарны: так как векторы $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{AF}$ и $\overrightarrow{DF}$ лежат на параллельных сторонах нашего четырёхугольника, то они являются коллинеарными;
- сонаправлены: при этом векторы $\overrightarrow{EC}$ и $\overrightarrow{AF}$ имеют одинаковое направление, значит они сонаправлены;
- противоположно направлены: векторы $\overrightarrow{EC}$ и $\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{AF}$ и $\overrightarrow{DF}$ –являются двумя парами противоположно направленных векторов.
- $\Delta EOC=\Delta AOF \Rightarrow |AF|=|EC|$ следовательно, вектора $\overrightarrow{EC}$ и $\overrightarrow{AF}$ не только коллинеарны, но и равны.

3. $ABCD$ – трапеция, у которой $AC=BD=15, BC=7, AD=20$. Найдите, если это возможно, такое число $m$, что

- $\overrightarrow{DA}=m\overrightarrow{BC}$;
- $\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{DB}$.

Решение.

Построим чертёж, иллюстрирующий условие задачи:



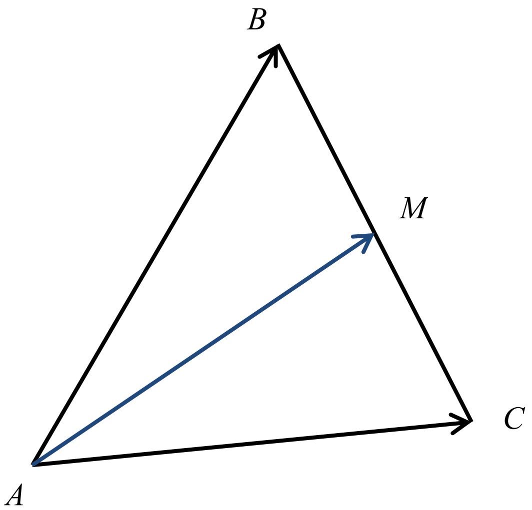

1. Вектор $\overrightarrow{AC}$ и вектор $\overrightarrow{DB}$ являются пересекающимися, следовательно, равенство $\overrightarrow{AC} = m\overrightarrow{DB}$ невозможно.

2. Вектор $\overrightarrow{DA}$ и вектор $\overrightarrow{BC}$ лежат на параллельных сторонах трапеции, следовательно, они коллинеарны. Значит такое $m$ существует и оно равно $\frac{|\overrightarrow{DA}|}{|\overrightarrow{BC}|} = \frac{20}{7}$ . Так как вектора противоположно направленные имеем $\overrightarrow{DA} = -\frac{20}{7}\overrightarrow{BC}$.

4. В треугольнике $ABC$ дано $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}$, точка $M$ – середина стороны $BC$. Выразите вектор $\overrightarrow{AM}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение.

Построим чертёж, иллюстрирующий условие задачи:




1. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

2. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\vec{a} + \vec{b}$

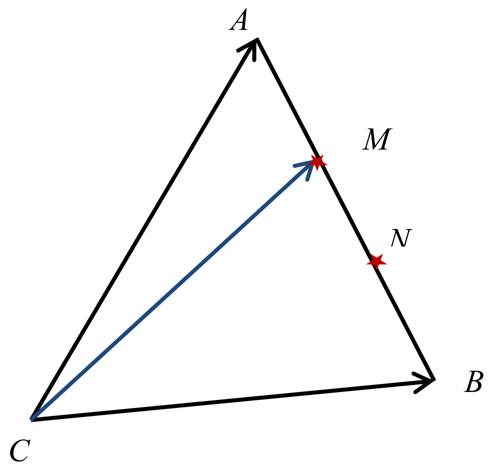
3. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

**Ответ:** $\boldsymbol{\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}}$

5. В треугольнике $ABC$ сторона $AB$ разделена точками $M$ и $N$ на три равные части. Вектор $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, вектор $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Выразите вектор $\overrightarrow{CM}$ через $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение.

Построим чертёж, иллюстрирующий условие задачи:

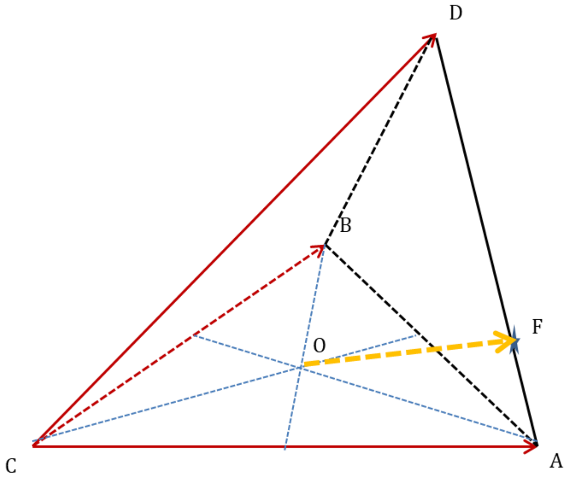



1. $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} = \vec{a} + \frac{1}{3}\vec{A}$
2. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = -\vec{a} + \vec{b}$
3. $\overrightarrow{CM} = \vec{a} + \frac{1}{3}(-\vec{a} + \vec{b}) = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$

**Ответ:** $\boldsymbol{\overrightarrow{CM} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}}$

6. В тетраэдре $DABC$ $O$ −точка пересечения медиан треугольника $ABC, F \in AD$, причём $AF: FD = 1:3$. Разложите вектор $\overrightarrow{OF}$ по векторам $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CD}$.

Построим чертёж, иллюстрирующий условие задачи:




1. Выразим вектор $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AF}$;

2. $\overrightarrow{OA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MA} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CA}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right)$
$= \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CA} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$;

3. $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA})$;

4. $\overrightarrow{OF} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CD} - \frac{1}{4}\overrightarrow{CA} =$
$\frac{5}{12}\overrightarrow{CA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CD}$.

**Ответ:** $\boldsymbol{\overrightarrow{OF} = \frac{5}{12}\overrightarrow{CA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CD}}$

**Разработал старший преподаватель кафедры высшей математики Н.В. Ежова.**