Раздел № 02 Векторная алгебра

Тема № 08 Декартовы координаты.

Скалярное произведение векторов

Практическое занятие № 08

Учебные вопросы:

1. Координаты на прямой. Деление отрезка в данном отношении.
2. Декартовы координаты. Различные действия с векторами, заданными в декартовой системе координат.
3. Скалярное произведение векторов.

Литература

1. Сборник задач по математике в четырёх частях. Под общей редакцией А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича

2. Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики.

3. А.Е. Умнов Аналитическая геометрия и линейная алгебра

4. Рябушко А.П. и др. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. Часть 1

5. П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 1

Решение задач

Замечание. Прежде чем переходить к решению задач стоит ознакомиться с лекцией 09. Декартовы координаты. Действия с векторами, заданными декартовыми координатами и лекцией 10. Произведение векторов: скалярное, векторное, смешанное. Кроме того, стоит вспомнить, что действия с векторами, заданными в декартовой системе координат и скалярное произведение Вы проходили в школе!

1. Отрезок AB разделён четырьмя точками на пять равных частей. Определите координату ближайшей к B точки деления, если $A(-3), B(7)$.
Решение.
Построим чертёж, иллюстрирующий условие задачи:

$$\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{4}{1} = \lambda.$$

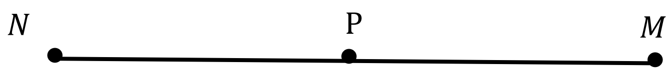
Если точки A и B лежат на оси Ox, то координата точки $C(x)$, делящей отрезок между $A(x_1)$ и $B(x_2)$ в отношении λ, определяется по формуле

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \quad (1)$$

Следовательно, $x_c = \frac{-3+4\cdot 7}{1+4} = 5$.

Ответ: $x_c = 5$

2. Найдите точку M симметричную точке $N(-5)$ относительно точки $P(4)$.
Решение.
Построим чертёж, иллюстрирующий условие задачи:



Проанализировав чертёж, делаем вывод, что точка P является серединой отрезка NM, значит к координате точки P можно применить формулу (1):

$$x_p = \frac{x_n + x_m}{2}, (\lambda = 1) => 4 = \frac{-5 + x_m}{2} => x_m = 13.$$

Ответ: $x_m = 13$.

3. Даны три последовательные вершины параллелограмма: $A(1; -2; 3)$, $B(3; 2; 1)$, $C(6; 4; 4)$. Найдите его четвёртую вершину D.
Решение.
Так как $ABCD$ параллелограмм, то $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$. Обозначим координаты точки D через x, y и z. Выразим координаты векторов $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$: $\overrightarrow{BC} = (6-3; 4-2; 4-1)$; $\overrightarrow{AD} = (x-1; y+2; z-3)$, то есть $\overrightarrow{BC} = (3; 2; 3), \overrightarrow{AD} = (x-1; y+2; z-3)$. Так как вектора $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$ равны, то их координаты совпадают:
$x - 1 = 3;$

$y + 2 = 2;$
$z - 3 = 3.$
Следовательно, $D(4; 0; 6)$.
Ответ: $\boldsymbol{D(4; 0; 6)}$.

4. Вектор $\vec{a}$ длины 2 составляет с осями Ox и Oy углы 60° и 120° соответственно. Найдите его координаты.
Решение. *Прежде всего вспомним понятие направляющих косинусов – это косинусы углов, которые вектор образует с осями координат.*
Применим данное понятие к решению нашей задачи. Пусть вектор $\vec{a}$ имеет произвольные координаты a_x, a_y, a_z. Тогда

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} => \cos 60^{\circ} = \frac{a_x}{2} => \frac{1}{2} = \frac{a_x}{2} => a_x = 1$$

$$\cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} => \cos 120^{\circ} = \frac{a_y}{2} => -\frac{1}{2} = \frac{a_y}{2} => a_y = -1$$

$$\cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|} => \cos\gamma = \frac{a_z}{2} => a_z = 2\cos\gamma.$$

По условию задачи длина вектора $\vec{a}$ равна 2, следовательно, можем воспользоваться формулой нахождения длины вектора:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$2 = \sqrt{1 + 1 + 4\cos^2\gamma} => 4 = 2 + 4\cos^2\gamma => \cos^2\gamma = \frac{1}{2} => \cos\gamma = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} => z = \pm\sqrt{2}.$
Ответ: $\boldsymbol{\vec{a} = (1; -1; \pm\sqrt{2})}$.

5. Заданы векторы $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = -3\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$. Найдите:
- координаты орта $\overrightarrow{b_o}$;
- координаты вектора $\vec{d} = \vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \vec{c}$;
- разложение вектора $\vec{f} = \vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$ по базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$;
- $\text{пр}_{\vec{j}}(\vec{a} + \vec{b})$

Решение.
- *Вспомним, что орт – вектор, сонаправленный данному, имеющий длину 1. То есть для его нахождения необходимо найти длину вектора и поделить все координаты вектора на найденное число:*

$$\vec{b}_o = \left(\frac{b_x}{|\vec{b}|}; \frac{b_y}{|\vec{b}|}; \frac{b_z}{|\vec{b}|}\right).$$

Исходя из этого нам необходимо найти длину вектора $\vec{b}$:
$|\vec{b}| = \sqrt{0 + (-3)^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2} => \overrightarrow{b_o} = \left(\frac{0}{3\sqrt{2}}; -\frac{3}{3\sqrt{2}}; -\frac{3}{3\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \overrightarrow{b_o} = \left(0; -\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

- *Вспомним, чтобы найти вектор, который является линейной комбинацией других векторов, заданных в декартовых координатах, необходимо создать аналогичную линейную комбинацию по каждой координате.*

Исходя из этого имеем:

$$d_x = a_x + \frac{1}{3}b_x - c_x \Rightarrow d_x = 2 - 0 - 1 = 1$$

$$d_y = a_y + \frac{1}{3}b_y - c_y => d_y = -3 - 1 - 1 = -5$$

$$d_z = a_z + \frac{1}{3}b_z - c_z => d_z = 1 - 1 - 2 = -2$$

Ответ: $\vec{\boldsymbol{d}} = (\mathbf{1}; \mathbf{-5}; \mathbf{-2})$**.**

- *Необходимо понимать, что данная задача почти не отличается от предыдущей. Отличие состоит лишь в форме записи ответа.*

Следовательно:

$$f_x = a_x - b_x + 2c_x \Rightarrow f_x = 2 + 0 + 2 = 4$$

$$f_y = a_y - b_y + 2c_y \Rightarrow f_y = -3 + 3 + 2 = 2$$

$$f_z = a_z - b_z + 2c_z \Rightarrow f_z = 1 + 3 + 4 = 8$$

Ответ: $\vec{\boldsymbol{f}} = \mathbf{4}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \mathbf{2}\vec{\boldsymbol{\jmath}} + \mathbf{8}\vec{\boldsymbol{k}}$**.**

- $\text{пр}_{\vec{\boldsymbol{b}}}\vec{\boldsymbol{a}} = |\vec{\boldsymbol{a}}|\cos\boldsymbol{\alpha} = |\vec{\boldsymbol{a}}|\frac{\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{b}}}{|\vec{\boldsymbol{a}}||\vec{\boldsymbol{b}}|} = \frac{\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{b}}}{|\vec{\boldsymbol{b}}|} \Rightarrow$

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = (2 + 0; -3 - 3; 1 - 3) \Rightarrow \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = (2; -6; -2).$$
$$\vec{\jmath} = (0; 1; 0) \Rightarrow \left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \vec{\jmath} = 2 \cdot 0 + (-6) \cdot 1 + (-2) \cdot 0 = -6$$
$$|\vec{\jmath}| = 1 \Rightarrow \text{пр}_{\vec{\jmath}}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \frac{-6}{1} = -6$$

Ответ: -6.

6. В прямоугольной трапеции $ABCD$ (AD и BC основания). $\angle A = 90^{\circ}, |AD| = 6, |BC| = 2, |AB| = 3.$ Найдите скалярные произведения:

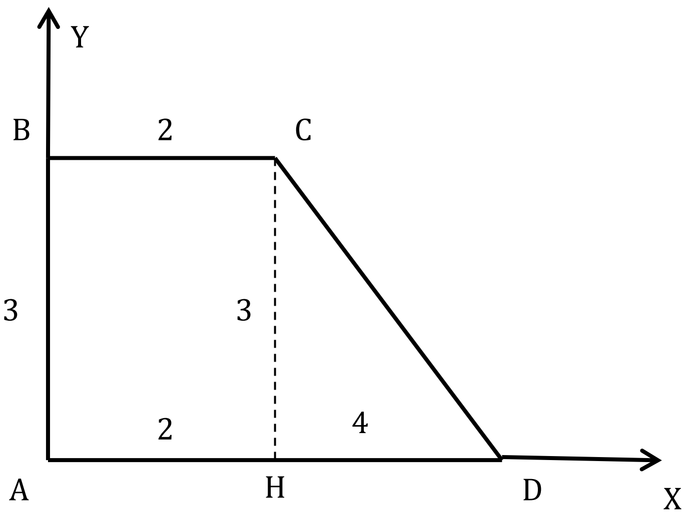
   1. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD}$;
   2. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC}$;
   3. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DA}$.

   Решение.

   Скалярное произведение можно находить или по определению или через координаты:

   - $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha$*, где* α *угол между векторами;*
   - $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

   Построим чертёж, иллюстрирующий условие задачи:



Введём систему координат как показано на чертеже.

$$A(0;0); B(0;3); C(2;3); D(6;0)$$

1. $\overrightarrow{BA} = (0; -3);\ \overrightarrow{CD} = (4; -3) \Rightarrow$
   $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \cdot 4 + (-3) \cdot (-3) = 9$
2. $\overrightarrow{AD} = (6; 0);\ \overrightarrow{DC} = (-4; 3) \Rightarrow$
   $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC} = 6 \cdot (-4) + 0 \cdot (-3) = -24$
3. $\overrightarrow{BC} = (2; 0);\ \overrightarrow{DA} = (-6; 0) \Rightarrow$
   $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DA} = 2 \cdot (-6) + 0 \cdot 0 = -12.$

Ответ: $\boldsymbol{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD} = 9}$;

$\boldsymbol{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC} = -24}$;

$\boldsymbol{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DA} - 12.}$

7. $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}, \left|\vec{b}\right| = 2, \widehat{\vec{a}, \vec{b}} = 150^{\circ}$. Найдите $|2\vec{a} - \vec{b}|$.

Решение.

Вспомните свойства скалярного произведения, в частности $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

$(2\vec{a} - \vec{b})^2 = |2\vec{a} - \vec{b}|^2$.

Найдём $\left(2\vec{a} - \vec{b}\right)^2 = 4\vec{a}^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 4|\vec{a}|^2 - 4|\vec{a}|\left|\vec{b}\right| \cos\alpha + \left|\vec{b}\right|^2 =$

$$4 \cdot 12 + 4 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 = 48 + 24 + 4 = 76 =>$$

$$|2\vec{a} - \vec{b}|^2 = 76 => \left|2\vec{a} - \vec{b}\right| = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$$

Ответ: $\boldsymbol{\left|2\vec{a} - \vec{b}\right| = 2\sqrt{19}}$

Разработал старший преподаватель кафедры высшей математики Н.В. Ежова.