

Раздел № 02 Векторная алгебра

Тема № 09 Векторное произведение
векторов. Смешанное произведение
векторов.

Практическое занятие № 09

Учебные вопросы:

1. Векторное произведение определение. Свойства векторного произведения. Геометрический смысл векторного произведения.
2. Смешанное произведение векторов определение. Свойства смешанного произведения. Геометрический смысл смешанного произведения.

Литература

1. Сборник задач по математике в четырёх частях. Под общей редакцией А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича
2. Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики.
3. А.Е. Умнов Аналитическая геометрия и линейная алгебра
4. Рябушко А.П. и др. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. Часть 1
5. П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 1

Решение задач

Замечание. Прежде чем переходить к решению задач стоит ознакомиться с лекцией 10. Произведение векторов: скалярное, векторное, смешанное.

*Векторное произведение вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ это **вектор** $\vec{c}$ такой что:*

- $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$
- $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \alpha$
- вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют правую тройку.

Основные свойства векторного произведения:

- $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$
- $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$
- $\vec{a} \times (k\vec{b}) = k(\vec{a} \times \vec{b})$
- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.

Геометрический смысл векторного произведения:

если вектор $\vec{c}$ является векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то его длина численно равна площади параллелограмма построенного на этих векторах.

1. Вычислите $\left| \left(\frac{1}{3}\vec{a} - 4\vec{b} \right) \times \left(\frac{1}{2}\vec{a} + 3\vec{b} \right) \right|$, если $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 4, \vec{a} \wedge \vec{b} = \frac{5\pi}{6}$.

Решение.

Упростим выражение $\left(\frac{1}{3}\vec{a} - 4\vec{b} \right) \times \left(\frac{1}{2}\vec{a} + 3\vec{b} \right)$, используя вышеперечисленные формулы:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3}\vec{a} - 4\vec{b} \right) \times \left(\frac{1}{2}\vec{a} + 3\vec{b} \right) &= \left(\frac{1}{3}\vec{a} \right) \times \left(\frac{1}{2}\vec{a} \right) + \left(\frac{1}{3}\vec{a} \right) \times (3\vec{b}) + (-4\vec{b}) \times \left(\frac{1}{2}\vec{a} \right) + (-4\vec{b}) \times (3\vec{b}) \\ &= \frac{1}{6}(\vec{a} \times \vec{a}) + \vec{a} \times \vec{b} - 2(\vec{b} \times \vec{a}) - 12(\vec{b} \times \vec{b}) = \vec{a} \times \vec{b} + 2(\vec{a} \times \vec{b}) = 3(\vec{a} \times \vec{b}). \end{aligned}$$

Следовательно, $\left| \left(\frac{1}{3}\vec{a} - 4\vec{b} \right) \times \left(\frac{1}{2}\vec{a} + 3\vec{b} \right) \right| = 3|\vec{a} \times \vec{b}| = 3|\vec{a}||\vec{b}| \sin \frac{5\pi}{6} = 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 12$.

Ответ: 12

2. Упростите выражение $(2\vec{i} + 3\vec{j}) \times (\vec{k} - 3\vec{i} - 2\vec{j})$.

Решение.

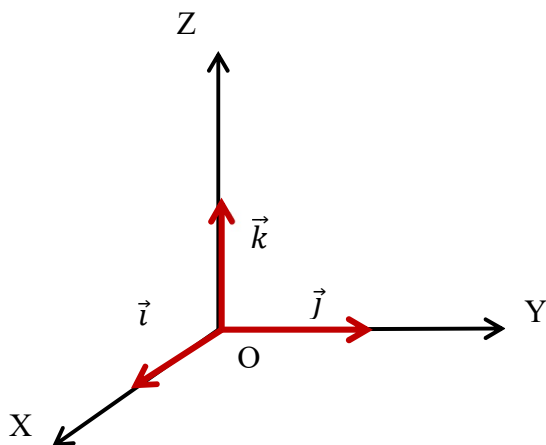
Обращаем внимание, что в отличие от предыдущей задачи нам необходимо получить в результате вектор, а не число!

$$\begin{aligned} (2\vec{i} + 3\vec{j}) \times (\vec{k} - 3\vec{i} - 2\vec{j}) &= (2\vec{i}) \times \vec{k} + (2\vec{i}) \times (-3\vec{i}) + (2\vec{i}) \times (-2\vec{j}) + (3\vec{j}) \times \vec{k} + \\ &+ (3\vec{j}) \times (-3\vec{i}) + (3\vec{j}) \times (-2\vec{j}) = 2(\vec{i} \times \vec{k}) - 6(\vec{i} \times \vec{i}) - 4(\vec{i} \times \vec{j}) + 3(\vec{j} \times \vec{k}) - 9(\vec{j} \times \vec{i}) - \\ &- 6(\vec{j} \times \vec{j}) = 2(\vec{i} \times \vec{k}) - 4(\vec{i} \times \vec{j}) + 3(\vec{j} \times \vec{k}) - 9(\vec{j} \times \vec{i}) = 2(\vec{i} \times \vec{k}) - 4(\vec{i} \times \vec{j}) + 3(\vec{j} \times \vec{k}) \\ &+ 9(\vec{i} \times \vec{j}) = 2(\vec{i} \times \vec{k}) + 5(\vec{i} \times \vec{j}) + 3(\vec{j} \times \vec{k}). \end{aligned}$$

На этом моменте многие из Вас

останавливаются и пишут полученное выражение

в ответ, забывая о том, что такое вектора $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:



По сути векторного произведения имеем:

$$\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j};$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k};$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}.$$

Поэтому выражение следует доработать:

$$\begin{aligned} 2(\vec{i} \times \vec{k}) + 5(\vec{i} \times \vec{j}) + 3(\vec{j} \times \vec{k}) &= \\ &= -2\vec{j} + 5\vec{k} - 3\vec{i}. \end{aligned}$$

Ответ: $-3\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$.

3. Вычислите синус угла между диагоналями параллелограмма $ABCD$, если $|AB| = 1$, $|AD| = 2$ и $\angle A = \frac{\pi}{3}$.

Решение.

Обозначим $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Тогда по правилу параллелограмма $\vec{d}_1 = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{d}_2 = \vec{a} - \vec{b}$.

Исходя из геометрического смысла векторного произведения $S_{ABCD} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|$, но с другой стороны, принимая во внимание формулу $S_{ABCD} = \frac{1}{2} |d_1| |d_2| \sin \alpha$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |d_1| |d_2| \sin \alpha &= |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| \Rightarrow \sin \alpha = \frac{2|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|}{|d_1| |d_2|} = \frac{2|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AD}| \sin \frac{\pi}{3}}{|d_1| |d_2|} = \\ &= \frac{2|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \frac{\pi}{3}}{|\vec{a} + \vec{b}| |\vec{a} - \vec{b}|} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2} \sqrt{(\vec{a} - \vec{b})^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{a^2 + 2\vec{a}\vec{b} + b^2} \sqrt{a^2 - 2\vec{a}\vec{b} + b^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5 + 2\sqrt{3}} \sqrt{5 - 2\sqrt{3}}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}. \end{aligned}$$

Обратите внимание, что при нахождении длин векторов $|\vec{a} + \vec{b}|$, $|\vec{a} - \vec{b}|$ использовали свойство и определение скалярного произведения.

Ответ: $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{39}}{13}$.

4. Найдите вектор $\vec{x}$, если известно, что он перпендикулярен векторам $\vec{a} = (4; -2; -3)$ и $\vec{b} = (0; 1; 3)$, его длина равна $|\vec{x}| = 39$ и угол между вектором $\vec{x}$ и осью Ox тупой.

Решение.

Исходя из определения векторного произведения, нам необходимо найти вектор сонаправленный векторному произведению векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. В случае если вектора заданы своими координатами, их векторное произведение находим по формуле:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \Rightarrow k\vec{x} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \\ \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} &= \vec{i} \cdot (-6 + 3) - \vec{j} \cdot (12 - 0) + \vec{k}(4 - 0) = -3\vec{i} - 12\vec{j} + 4\vec{k} \Rightarrow \\ k\vec{x} &= (-3; -12; 4) \Rightarrow \vec{x} = \left(\frac{-3}{k}; \frac{-12}{k}; \frac{4}{k} \right). \end{aligned}$$

Нам дана длина вектора $|\vec{x}| = 39$. Воспользуемся формулой для нахождения длины вектора:

$$|\vec{x}| = \sqrt{x_x^2 + x_y^2 + x_z^2} \Rightarrow 39 = \sqrt{\frac{9}{k^2} + \frac{144}{k^2} + \frac{16}{k^2}} \Rightarrow 39 = \frac{13}{|k|} \Rightarrow |k| = \frac{1}{3}.$$

Мы получили два варианта вектора, имеющего длину 39 и перпендикулярного двум

заданным векторам:

$$\vec{x}_1 = (-9; -36; 12) \text{ и } \vec{x}_2 = (9; 36; -4).$$

Принимая во внимание последнее условие, получаем окончательный ответ:

$$\vec{x} = (-9; -36; 12).$$

Ответ: $\vec{x} = (-9; -36; 12)$.

В следующих задачах используется понятие и свойства смешанного произведения.

Смешанное произведение трёх векторов – это операция, которая сочетает скалярное и векторное произведение:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}).$$

Свойства смешанного произведения:

- $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{c}\vec{a}$
- если $\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0 \Rightarrow$ тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ – правая
- если $\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0 \Rightarrow$ тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ – левая
- если $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0 \Rightarrow$ вектора $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ – компланарны
- если $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z), \vec{b} = (b_x; b_y; b_z), \vec{c} = (c_x; c_y; c_z)$, то

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Геометрический смысл смешанного произведения:

модуль смешанного произведения векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ равен объёму параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$.

5. Даны векторы $\vec{a} = (1; -2; 5), \vec{b} = (-2; 0; 1)$ и $\vec{c} = (3; -4; 0)$. Определить ориентацию троек:

- $\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}$;
- $\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}$;
- $\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}$.

Решение.

На самом деле, учитывая свойства смешанного произведения, нам достаточно определить ориентацию любой какой-либо тройки. Найдём ориентацию тройки $\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}$. Для этого нам необходимо найти соответствующее смешанное произведение:

$$\vec{a}\vec{c}\vec{b} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 0 + 0 - 40 - 0 + 6 = -38 < 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \vec{a}, \vec{c}, \vec{b}$ – левая тройка, так как $\vec{a}\vec{c}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}\vec{c} = \vec{c}\vec{b}\vec{a}$, то тройка $\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}$ так же левая, соответственно, тройка $\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}$ – правая.

Ответ:

- $\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}$ – левая тройка
- $\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}$ – правая тройка
- $\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}$ – левая тройка.

6. Треугольная пирамида задана координатами своих вершин $A(1; 3; 2), B(-1; 1; 1), C(-3; 5; 4), D(5; -7; 6)$. Точка M делит ребро AD в отношении 1:3, начиная с вершины D , точка N является серединой ребра DC , точка P такова что $\frac{|DP|}{|PB|} = \frac{2}{1}$. Вычислите:

- $\frac{V_{DMNP}}{V_{DABC}}$;
- h_d —высоту пирамиды $DMNP$.

Решение.

Исходя из геометрического смысла смешанного произведения и соотношения между объёмами параллелепипеда и пирамиды, построенных на одних и тех же векторах имеем:

$$V_{DMNP} = \frac{1}{6} |\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{DP} \cdot \overrightarrow{DN}|$$

$$V_{DABC} = \frac{1}{6} |\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC}|$$

$$\frac{V_{DMNP}}{V_{DABC}} = \frac{|\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{DP} \cdot \overrightarrow{DN}|}{|\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC}|} = \frac{|(\frac{1}{4}\overrightarrow{DA}) \cdot (\frac{2}{3}\overrightarrow{DB}) \cdot (\frac{1}{2}\overrightarrow{DC})|}{|\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC}|} = \frac{1}{12} \frac{|\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC}|}{|\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC}|} = \frac{1}{12}.$$

Вспомните, насколько неприятными были задачи такого типа в школьном курсе стереометрии. И как же просто их можно решить!

Вторая часть данной задачи будет сложнее.

Мы нашли только отношение объёмов. Теперь придётся найти сам объём и не только.

$$V_{DMNP} = \frac{1}{6} |\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{DP} \cdot \overrightarrow{DN}|$$

Но с другой стороны $V_{DMNP} = \frac{1}{3} S_{MNP} h_D$.

$$\text{Значит, } \frac{1}{6} |\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{DP} \cdot \overrightarrow{DN}| = \frac{1}{3} S_{MNP} h_D \Rightarrow h_D = \frac{|\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{DP} \cdot \overrightarrow{DN}|}{2 S_{MNP}} = \frac{|\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{DP} \cdot \overrightarrow{DN}|_2}{2 |\overrightarrow{MP} \times \overrightarrow{MN}|}.$$

Заметим, что при вычислении объёма нам необходимо, чтобы вектора исходили из одной точки. В первом пункте нам было удобнее в качестве такой точки взять точку D , так как она является общей для пирамид $DMNP$ и $DABC$. Но для второго пункта нам явно количество векторов стоит сократить. Если мы поменяем точку, из которой выходят вектора, объём нашей пирамиды не изменится, а количество вычислений существенно сократится:

$$h_D = \frac{|\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{DP} \cdot \overrightarrow{DN}|}{|\overrightarrow{MP} \times \overrightarrow{MN}|} = \frac{|\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MN}|}{|\overrightarrow{MP} \times \overrightarrow{MN}|}.$$

Для нахождения координат точек M, N и P придётся вспомнить формулы для нахождения координат точки, делящей отрезок в заданном соотношении:

$$x_M = \frac{x_A + \lambda x_D}{1 + \lambda}, \lambda = 3 \Rightarrow x_M = \frac{1 + 3 \cdot 5}{4} = 4$$

$$M(4; -6; 5)$$

$$y_M = \frac{y_A + \lambda y_D}{1 + \lambda}, \lambda = 3 \Rightarrow y_M = \frac{-3 + 3 \cdot (-7)}{4} = -6$$

$$z_M = \frac{z_A + \lambda z_D}{1 + \lambda}, \lambda = 3 \Rightarrow z_M = \frac{2 + 3 \cdot 6}{4} = 5.$$

$$x_P = \frac{x_B + \lambda x_D}{1 + \lambda}, \lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow x_P = \frac{-1 + \frac{1}{2} \cdot 5}{\frac{3}{2}} = 1$$

$$P(1; 3; 4)$$

$$y_P = \frac{y_B + \lambda y_D}{1 + \lambda}, \lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow y_P = \frac{8 + \frac{1}{2} \cdot (-7)}{\frac{3}{2}} = 3$$

$$z_P = \frac{z_B + \lambda z_D}{1 + \lambda}, \lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow z_P = \frac{3 + \frac{1}{2} \cdot 6}{\frac{3}{2}} = 4.$$

$$x_N = \frac{x_C + x_D}{2} \Rightarrow x_N = \frac{-3 + 5}{2} = 1$$

$$N(1; -1; 5)$$

$$y_N = \frac{y_C + y_D}{2} \Rightarrow y_N = \frac{5 - 7}{2} = -1$$

$$z_N = \frac{z_C + z_D}{2} \Rightarrow z_N = \frac{4 + 6}{2} = 5.$$

$$M(4; -6; 5), P(1; 3; 4), N(1; -1; 5), D(5; -7; 6) \Rightarrow \\ \Rightarrow \overrightarrow{MP} = (-3; 9; -1), \overrightarrow{MN} = (-3; 5; 0), \overrightarrow{MD} = (1; -1; 1).$$

Найдём их смешанное и векторное произведение:

$$\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MN} = \begin{vmatrix} -3 & 9 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -1(5 - 3) - 1(-15 + 27) = -2 - 12 = -14.$$

$$\overrightarrow{MP} \times \overrightarrow{MN} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 9 & -1 \\ -3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(0 + 5) - \vec{j}(0 - 3) + \vec{k}(-15 + 27) = 5\vec{i} + 3\vec{j} + 12\vec{k}.$$

$$|\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MN}| = |-14| = 14 \\ |\overrightarrow{MP} \times \overrightarrow{MN}| = \sqrt{5^2 + 3^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 9 + 144} = \sqrt{178}$$

$$h_D = \frac{14}{\sqrt{178}} = \frac{7\sqrt{178}}{89}.$$

Ответ: $\frac{V_{DMNP}}{V_{DABC}} = \frac{1}{12};$
 $h_D = \frac{7\sqrt{178}}{89}.$

Разработал старший преподаватель кафедры высшей математики Н.В. Ежова.