ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Раздел № 1-3 Линейная алгебра. Векторная алгебра. Комплексные числа и многочлены.

Тема № 1-7 Определители n-го порядка. Решение линейных систем 2×2 и 3×3 методом Крамера, методом Гаусса. Однородные линейные системы. Миноры и алгебраические дополнения. Матрицы и операции с ними. Обратная матрица. Ранг матрицы.

Тема № 7-9 Геометрические векторы. Декартова система координат. Умножение векторов (скалярное, векторное, смешанное).

Тема № 10-13 Комплексные числа. Многочлены над полем комплексных чисел. Алгебраические уравнения. Разложение многочлена на множители. Рациональные дроби.

Коллоквиум

Вариант 1.

Задача 1. Дана матрица $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 8 \\ 2 & -6 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ найдите указанный минор и алгебраическое дополнение $\text{M}_{23} =$ ___, $\text{A}_{32} =$____.

Задача 2. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & 8 & 3 & -10 \end{vmatrix} =$____.

Задача 3. Известно, что $detA = 6$, где матрица $A_{2\times2}$ −квадратная. Тогда $det3A =$ ___.

Задача 4. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Матрица $C = 2A^T + B^T$, её элемент $c_{12} =$ ____.

Задача 5. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Матрица $C = A^T B$, её элемент $c_{23} =$____.

Задача 6. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Найдите обратную к ней матрицу $A^{-1} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$.

Задача 7. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ Матрица $B = A^{-1}$. Найдите указанный элемент матрицы B. $b_{12} =$_____.

Задача 8. Методом элементарных преобразований над строками расширенная матрица линейной системы была приведена к ступенчатой форме

$\bar{A} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$, тогда эта система

- совместная определенная (имеет единственное решение)

- нет правильного ответа
- несовместна (не имеет решений
- может иметь ровно три решения
- совместная неопределенная (имеет бесконечно много решений).

Задача 9. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \end{pmatrix}$

$rankA =$____.

Задача 10. При каком значении параметра λ квадратная однородная система линейных уравнений, матрица коэффициентов которой $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & \lambda & 3 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$, имеет ненулевое решение?

λ=____.

Задача 11. Найдите собственные числа квадратной матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\lambda_1 =$ ___ $< \lambda_2 =$ ____.

Задача 12. Даны две точки в пространстве: $A(-1; 0; 1)$ и $B(-2; 3; 1)$. $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ образует

- с осью абсцисс угол;
- с осью ординат угол;
- с осью аппликат угол.

Задача 13. Даны две точки в пространстве: $A(1; 0; 3)$ и $B(1; 6; 12)$. Найдите координаты точки M, которая делит отрезок $[AB]$ в отношении 2:1, считая от A.
$M(\_;\_;\_)$.

Задача 14. Даны векторы $\vec{a} = (-3; 4; 0)$ и $\vec{b} = (2; -2; 2)$. Найдите косинус угла между ними. Ответ дайте в виде десятичной дроби с двумя знаками после запятой.

Задача 15. Найдите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = (1; -2; -1)$ и $\vec{b} = (0; 3; 4)$ как на сторонах. Ответ дайте в виде десятичной дроби с двумя знаками после запятой.

$S =$____.

Задача 16. Даны три вектора в пространстве: $\vec{a} = (1; 0; 4), \vec{b} = (-1; -1; 2), \vec{c} = (2; -1; 3)$.

Выберите все правильные утверждения из предложенных:

- тройка векторов $< \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} >$ −левая
- тройка векторов $< \vec{c}, \vec{a}, \vec{b} >$ −правая
- тройка векторов $< \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} >$ −правая
- векторы $\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}$ −компланарны
- векторы $\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}$ −образуют базис в пространстве
- нет правильного ответа
- среди векторов $\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}$ −есть коллинеарные
- тройка векторов $< \vec{b}, \vec{a}, \vec{c} >$ −левая.

Задача 17. Даны два комплексных числа: $z_1 = 3 - 2i$, $z_2 = 1 + 2i$. Тогда $\frac{z_1}{z_2} =$ _ + _i

Задача 18. Приведите число $z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ к тригонометрической форме. Вставьте пропущенные числа $z =$ _(cos(_π) + i sin(_π)).

Задача 19. $i^{2025} =$____.

Задача 20. Сколько существует различных корней $\sqrt[3]{-27}$. Найдите корень, который находится в первой четверти.

Задача 21.$e^{3ln2+13\pi i} =$____.

Задача 22. Справедливо ли утверждение?

$$\sqrt{e^{2\pi i}} = e^{\pi i}.$$

Задача 23. Многочлен третьей степени делим по схеме Горнера на линейный многочлен $(x + 2)$. Вставьте пропущенные числа в схему:

	4	2	-1	-1

Найдите остаток от деления. Остаток равен__.

Задача 24. Квадратное уравнение $x^2 - 6x + 34 = 0$

- не имеет корней
- имеет два различных вещественных корня
- имеет два комплексно-сопряженных корня
- имеет один корень кратности 2
- нет правильного ответа.

Найдите корни уравнения, в ответ введите модуль разности корней. Если корней нет, или если их количество не равно двум, введите 0.

Задача 25. Известны некоторые корни многочлена с вещественными коэффициентами $P(x)$: $1; 2; 2; 3;\ -2; 1-3i; 1-3i; 1+3i; 2i$.

Определите наименьшую возможную степень этого многочлена.

$degP(x) =$ ___.

Задача 26. Дана рациональная дробь:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{5x^{11} - 5x^5 + x^4 - 3x^2 + 7}{(x-1)^3(x^2+4)^4 x(x^2+x+4)^3(x+5)(x^2+2)^3},$$

тогда $\deg Q(x) =$ ___.

При разложении в сумму простейших получится ____ дробей, из них

- дробей первого типа ____,
- дробей второго типа ____,
- дробей третьего типа ___,
- дробей четвёртого типа ____.
-

Задача 27. Справедливо ли утверждение?

Всякий многочлен 17 степени с вещественными коэффициентами имеет по крайней мере один вещественный корень.

- Верно
- Неверно.

Задача 28. Теоретические вопросы.

- Определение векторного произведения
- Теоретический вопрос по линейной алгебре из списка вопросов
- Теоретический вопрос по векторной алгебре или комплексным числам и многочленам из списка вопросов

Разработал старший преподаватель кафедры высшей математики Н.В.Ежова