

Раздел № 4-5 Введение в

математический анализ.

Дифференциальное исчисление

функции одной

вещественной переменной.

Тема № 13-18. Логические символы. Множества и действия над ними. Метод мат. индукции, бином Ньютона. Вещественные числа. Типы множеств. Точная верхняя и нижняя границы. Понятие функции одной вещественной переменной и числовой последовательности (ЧП). Предел ЧП. Единственность предела. Свойства сходящихся последовательностей. Предельный переход в неравенствах. Принцип сжатой переменной. Бесконечно малые и бесконечно большие ЧП. Связь между ними. Монотонные последовательности. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности. Число e . Два определения предела функции и их эквивалентность. Свойства пределов. Односторонние пределы. Непрерывность функции в точке, на интервале и на отрезке. Свойства непрерывных функций. Непрерывность сложной и обратной функций. Классификация точек разрыва. Непрерывность основных элементарных функций. Графики элементарных функций. Свойства функций, непрерывных на отрезке: 1-я и 2-я теоремы Больцано - Коши, теоремы Вейерштрасса. Замечательные пределы. Сравнение бесконечно малых. Символы

Ландау. Таблица эквивалентных бесконечно малых, замена на эквивалентные.

Тема № 18 – 21. Определение производной и дифференциала, их физический и геометрический смысл. Таблица производных основных элементарных функций и основные правила вычисления производных и дифференциалов. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости. Применение дифференциалов к приближенным вычислениям. Основные теоремы дифференциального исчисления: теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши. Правило Лопиталя. Производные и дифференциалы высшего порядка. Производные функций, заданных параметрически и неявно. Формула Тейлора для

многочлена и для гладких функций. Остаточный член в формах Пеано и Лагранжа. Разложение основных элементарных функций по формуле Маклорена. Условия возрастания, убывания дифференцируемой функции на интервале. Локальные экстремумы функции, их типы (гладкий, острый, угловой) и условия существования. Глобальный экстремум. Направление выпуклости и точки перегиба графика функции. Определение и правила отыскания вертикальных, горизонтальных и наклонных асимптот. Полное исследование функции и построение ее графика. Построение кривой, заданной параметрически.

Коллоквиум 2 (экзамен)

Вариант 1.

Задача 1. Выберите пропущенные слова и символы в определении:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{существует} \\ \text{для любого } \varepsilon \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} >0 \\ \leq 0 \\ =0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} \text{существует} \\ \text{для всякого} \end{array} \right] N(\varepsilon): n \left[\begin{array}{l} \leq \\ \geq \\ = \end{array} \right] N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - 3| \left[\begin{array}{l} < \\ \leq \\ = \end{array} \right] \varepsilon.$$

Или вариант: Дайте определение на языке Коши (или Гейне) : $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$.

Задача 2. $X = [-3; 2) \cap [-1; 5)$.

$$\inf X = \underline{\hspace{1cm}} \quad \sup X = \underline{\hspace{1cm}}$$

Задача 3. Среди перечисленных ниже числовых последовательностей выберите все бесконечно большие:

- среди этих величин нет бесконечно больших
- $\log_5 \frac{1}{n}$
- $5^{\ln n}$
- $\ln 5^{\frac{1}{n}}$
- $\log_{\frac{1}{n}} 5$.

Задача 4. Известно, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon): 0 < |x - 2| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow f(x) > \varepsilon \Leftrightarrow$

- $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$
- $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = +\infty$
- нет правильного ответа.

Задача 5. Вычислите $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^{3+5n\sqrt{n}+4\sqrt{n+1}}}{(n^2+1+\sqrt[3]{n-1})\sqrt{4n^2+7n+10}} = \underline{\hspace{1cm}}.$

Задача 6. Вычислите $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+4}{n} \right)^{-n \ln \frac{1}{2}} = \underline{\hspace{1cm}}.$

Задача 7. Вычислите $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2+4x+7}{2x^4+x+1} = \underline{\hspace{1cm}}.$

Задача 8. Вычислите $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^4 - x^3 + x - 1} = \underline{\hspace{1cm}}$.

Задача 9. Вычислите $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x}{tg(2x^2)} = \underline{\hspace{1cm}}$.

Задача 10. Вычислите $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{arccctg} x}{(\sqrt{1-x}+1) \ln\left(1-\frac{3\pi x}{2}\right)} = \underline{\hspace{1cm}}$.

Задача 11. Найдите предел степенно-показательной функции:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{3x}-1}{\operatorname{arctg} x} \right)^{\frac{x-2}{x-1}} = \underline{\hspace{1cm}}.$$

Задача 12. Найдите предел степенно-показательной функции:

$$\lim_{x \rightarrow +0} (3x)^{tg x} = \underline{\hspace{1cm}}.$$

Задача 13. Известно, что $f(x_0 + 0) = +\infty$, $f(x_0 - 0) = 3$, $f(x_0) = 3$, тогда в точке x_0 функция:

- имеет разрыв второго рода
- имеет неустранимый разрыв первого рода
- имеет устранимый разрыв
- непрерывна
- нет правильного ответа.

Задача 14. Функция $y = \frac{\arcsin x}{tg x}$ в точке $x_0 = \pi$:

- имеет разрыв второго рода
- имеет неустранимый разрыв первого рода
- имеет устранимый разрыв
- непрерывна
- нет правильного ответа.

Задача 15. Вычислите производную функции $y = \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}}$ в точке $x_0 = 5$.

Ответ $\underline{\hspace{1cm}}$.

Задача 16. Запишите уравнение касательной к графику функции $y = \sqrt[3]{x}$ в точке $x_0 = 8$.

Вставьте пропущенные числа $y - \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}(x - \underline{\hspace{1cm}})$.

Если будут получаться иррациональные числа или дроби, то вычислите их на калькуляторе, в ответ введите полученное число с двумя (или более) знаками после запятой (или точки). Можно не округлять.

Задача 17. Функция $y(x)$ задана параметрически системой уравнений:

$$\begin{cases} x = t^3 - t, \\ y = t^2 + t. \end{cases}$$

Найдите указанные производные при $t = 1$:

$$y'_x(1) = \underline{\hspace{1cm}}.$$

$$y''_{xx}(1) = \underline{\hspace{1cm}}.$$

Задача 18. Вычислите производную функции $f(x) = x^{3^x}$ в точке $x_0 = 3$. Вставьте пропущенные числа в ответе: $f'(x_0) = \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}} \ln^2 \underline{\hspace{1cm}}.$

Задача 19. Найдите производную $y'_x(4; -1)$ функции $y = y(x)$, заданной неявно уравнением $x^2 + \frac{x}{y} - y^2 = 11$.

$$y'_x(4; -1) = \underline{\hspace{1cm}}.$$

Задача 20. Многочлен $P(x) = x^7 + 6x^5 - 4x + 5$ разложен по степеням $(x + 1)$. Найдите коэффициент при $(x + 1)^6$.

Задача 21. Функция $f(x)$ разложена по формуле Маклорена:

$$f(x) = x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{(2n-1)!} \quad \text{Тогда}$$

- $f(x) = x \sin x$
- $f(x) = -1 + \cos x$
- $f(x) = x \cos x$
- $f(x) = e^{-x^2}$
- $f(x) = \cos x^2$.

Задача 22. Найдите первый и второй дифференциал функции $y = \cos^2 2x$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{8}$,

если $\Delta x = 0,1$.

$$dy(x_0) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$d^2y(x_0) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

Задача 23. Функция $f(x)$ в точке x_0 имеет первую и вторую производные, причём $f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 3$, тогда в некоторой (достаточно малой) окрестности этой точки

$f(x)$ $\left[\begin{array}{l} \text{убывает} \\ \text{возрастает} \\ \text{имеет максимум} \\ \text{имеет минимум} \end{array} \right.$, а график функции в этой окрестности $\left[\begin{array}{l} \text{выпуклость вверх} \\ \text{выпуклость вниз} \\ \text{в этой точке перегиб} \end{array} \right.$

Задача 24. Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции

$$y = x^3 + 6x^2 - 7x + 4$$

в точке перегиба.

Ответ: $\underline{\hspace{2cm}}$.

Задача 25. Найдите x_0 - точку экстремума функции $f(x) = xe^{-x}$.

$$x_0 = \underline{\hspace{2cm}},$$

в этой точке функция имеет локальный $\left[\begin{array}{l} \text{минимум} \\ \text{максимум} \end{array} \right.$.

Задача 26. Найдите наклонную асимптоту графика функции

$$y = \frac{5x^4 + 3x^3 - x^2 - 1}{x^3 - 5x^2 + 1}.$$

Ответ: $y = \underline{\hspace{1cm}}x + \underline{\hspace{1cm}}$.

Разработал старший преподаватель кафедры высшей математики Н.В.Ежова