Раздел № **02** **Аналитическая геометрия**

Тема № **03** **Аналитическая геометрия на плоскости**

Лекция № **08** **Прямая на плоскости**

Учебные вопросы:

1. **Преобразование декартовых координат на плоскости**
2. **Уравнение линии на плоскости**
3. **Различные виды уравнений прямой на плоскости**
4. **Геометрические задачи, связанные с прямой на плоскости**

Литература.

1. Демидович Б. П. Краткий курс высшей математики, 2007, М.: Аст, Астрель

2. Ефимов А. В., Демидович Б. П. Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях. Ч.1. Линейная алгебра и основы математического анализа, 2014, М.: Альянс

3. Потапов А. П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия, Учебник и практикум для прикладного бакалавриата, 2017, М.: Юрайт

ТЕКСТ

1. Преобразование декартовых координат на плоскости.

Постановка задачи. Взаимное расположение систем координат (Рис.1).

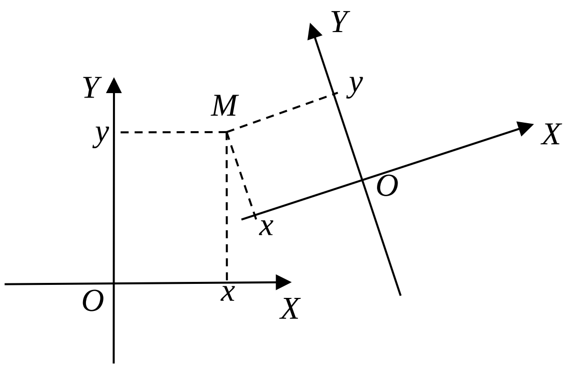


Рис. 1. Взаимное расположение систем координат

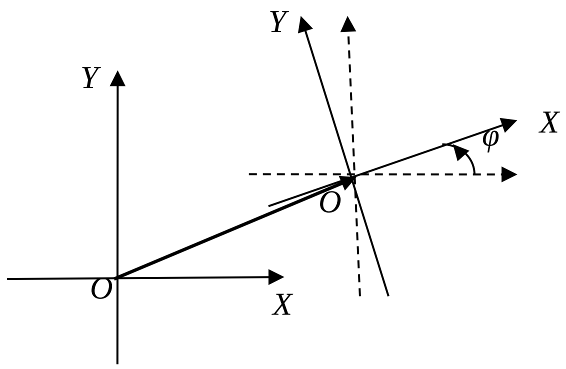


Рис. 2. Параллельный перенос и поворот осей координат

Параллельный перенос и поворот осей координат (Рис.2).

Формулы преобразования координат при параллельном переносе:

$$\overline{X}=\overline{X}_0+¿\ \overline{X} \Leftrightarrow \begin{cases} x=x_0+x \\ y=y_0+y \end{cases}, \qquad \overline{X}=\overline{X}-\overline{X}_0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=x-x_0 \\ y=y-y_0 \end{cases} \qquad (1)$$

Формулы преобразования координат при повороте осей координат:

$$\overline{X}=A_\varphi\cdot\overline{X} \Leftrightarrow \begin{cases} x=x\cos\varphi-y\sin\varphi \\ y=x\sin\varphi+y\cos\varphi \end{cases} \qquad (2)$$

$$\overline{X}=¿\ A_\varphi^T\cdot\overline{X} \Leftrightarrow \begin{cases} x=x\cos\varphi+y\sin\varphi \\ y=-x\sin\varphi+y\cos\varphi \end{cases} \qquad (3)$$

$A_\varphi=\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ $-¿$ матрица поворота, $A_\varphi^{-1}=A_\varphi^T=\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

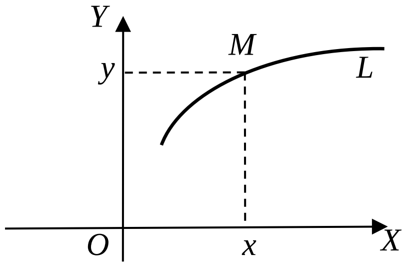
Общие формулы преобразования координат:

$$\overline{X}=\overline{X}_0+A_\varphi\cdot\overline{X} \Leftrightarrow \begin{cases} x=x_0+x\cos\varphi-y\sin\varphi \\ y=y_0+x\sin\varphi+y\cos\varphi \end{cases} \qquad (4)$$

$$\overline{X}=A_\varphi^T\cdot\left(\overline{X}-\overline{X}_0\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x=\left(x-x_0\right)\cos\varphi+\left(y-y_0\right)\sin\varphi \\ y=-\left(x-x_0\right)\sin\varphi+\left(y-y_0\right)\cos\varphi \end{cases} \qquad (5)$$

2. Уравнение линии на плоскости.

Уравнение линии на плоскости (Рис.3) в декартовой системе координат.



$$M\left(x,y\right)\in L \Leftrightarrow F\left(x,y\right)=0$$

Рис. 3. Линия на плоскости

Каноническое уравнение окружности радиуса R с центром в точке $C\left(x_0;y_0\right)$:

$$\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2=R^2 \qquad (6)$$

Параметрические уравнения линии: $\begin{cases} x=x\left(t\right) \\ y=y\left(t\right) \end{cases}$, $t\in T$, где T – промежуток.

Примеры: $\begin{cases} x=x_0+R\cdot\cos t \\ y=y_0+R\cdot\sin t \end{cases}$, $t\in\left[0;2\pi\right)$ – окружность,

$\begin{cases} x=R\cdot\left(t-\sin t\right) \\ y=R\cdot\left(1-\cos t\right) \end{cases}$, $t\in[0;+\infty)$ – циклоида.

Уравнение линии в полярной системе координат: $F(r,\varphi)=0$. Например, полярное уравнение окружности радиуса R с центром в начале координат: $r=R$, $\varphi\in[0;2\pi)$.

Линии 1-го порядка на плоскости в декартовой системе координат:

$$Ax+By+C=0, \text{ где } A^2+B^2\neq 0 \qquad (7)$$

Линии 2-го порядка на плоскости в декартовой системе координат:

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0, \text{ где } A^2+B^2+C^2\neq 0 \qquad (8)$$

<u>Теорема</u> 1. Порядок линии сохраняется при преобразовании декартовой системы координат на плоскости.

<u>Теорема</u> 2. Прямые линии на плоскости, и только они являются линиями 1-го порядка.

3. Различные виды уравнений прямой на плоскости.

1. Общее уравнение:

$$Ax+By+C=0 \quad (A^2+B^2\neq 0) \qquad (9)$$

$\vec{n}\{A,B\}$ −¿ вектор нормали прямой L: $\vec{n}\perp L$.

2. Неполное уравнение: $Ax+By+C=0 \quad (ABC=0, A^2+B^2\neq 0)$.

3. Нормальное уравнение:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0 \quad (A^2+B^2\neq 0) \qquad (10)$$

$\vec{n}\{A,B\}\perp L$, $M_0(x_0;y_0)\in L$.

4. Каноническое уравнение:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m} \quad (l^2+m^2\neq 0) \qquad (11)$$

$\vec{s}$— направляющий вектор прямой L: $\vec{s}\{l;m\}\parallel L$, $M_0(x_0;y_0)\in L$.

5. Параметрические уравнения:

$$\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \end{cases} \quad (l^2+m^2\neq 0) \qquad (12)$$

$\vec{s}\{l;m\}\parallel L$, $M_0(x_0;y_0)\in L$.

6. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad (13)$$

$M_1(x_1;y_1) \in L$, $M_2(x_2;y_2) \in L$.

7. Уравнение прямой «в отрезках»:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \quad (ab \neq 0) \tag{14}$$

$A(a;0)$, $B(0;b)$ - точки пересечения прямой L с осями координат:

$A(a;0)=L\cap OX$, $B(0;b)=L\cap OY$.

8. Нормированное уравнение:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \tag{15}$$

$\vec{n}_0\{\cos\alpha;\sin\alpha\} \perp L$, $|\vec{n}_0|=1$, $\vec{n}_0$ направлен в сторону прямой L,

$p=¿\ d(O;L)$ – расстояние от начала координат до прямой L.

9. Уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$y-y_0=k(x-x_0) \text{ или: } y=kx+b \tag{16}$$

$M_0(x_0;y_0) \in L$, $k=¿\ tg\,\alpha$, $\alpha=\angle\,(L,OX)$, $\alpha\neq 90°$,

k— угловой коэффициент, $L\cap OY=(0;b)$.

Переход от одного вида уравнений прямой к другому виду. Примеры.

4. Геометрические задачи, связанные с прямой на плоскости.

Взаимное расположение двух прямых на плоскости. Условие пересечения прямых (заданных общими уравнениями) в одной точке. Примеры.

Угол между двумя прямыми, заданными общими, каноническими уравнениями или уравнениями с угловыми коэффициентами. Примеры. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.

Расстояние от точки до прямой, заданной нормированным уравнением или общим уравнением. Уравнения биссектрис углов, образованных пересекающимися прямыми, заданными общими уравнениями. Примеры.

Разработал доцент

кафедры высшей математики **А. П. Потапов**