Раздел № **02** **Аналитическая геометрия**

Тема № **03** **Аналитическая геометрия на плоскости**

Лекция № **09** **Кривые 2-го порядка**

Учебные вопросы:

1. **Эллипс**
2. **Гипербола**
3. **Парабола**
4. **Общие свойства кривых 2-го порядка**

Литература.

1. Демидович Б. П. Краткий курс высшей математики, 2007, М.: Аст, Астрель

2. Ефимов А. В., Демидович Б. П. Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях. Ч.1. Линейная алгебра и основы математического анализа, 2014, М.: Альянс

3. Потапов А. П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия, Учебник и практикум для прикладного бакалавриата, 2017, М.: Юрайт

ТЕКСТ

1. Эллипс.

Линии 2-го порядка. Каноническое уравнение окружности:

$$x^2+y^2=R^2 \qquad (1)$$

Каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (a\ge b>0) \qquad (2)$$

Вершины $A_1(-a;0), A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$, оси 2a, 2b и полуоси a, b, центр эллипса, свойства эллипса (ограниченность и симметричность). Фокусы $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$, межфокусное расстояние 2c, где $c=\sqrt{a^2-b^2}$ фокальные радиусы r_1 и r_2 точки M на эллипсе (Рис. 1).

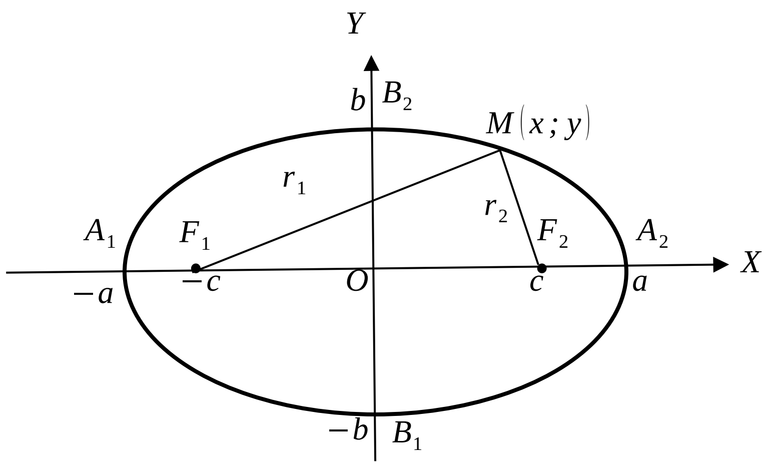

Рис. 1. Элементы эллипса

Бифокальное свойство эллипса:

$$r_1 + r_2 = 2a \qquad (3)$$

Эксцентриситет: $e = \dfrac{c}{a}$, $0 \le e < 1$. Директрисы эллипса D_1 и D_2:

$x = \pm \dfrac{a}{e}$ (Рис. 2).

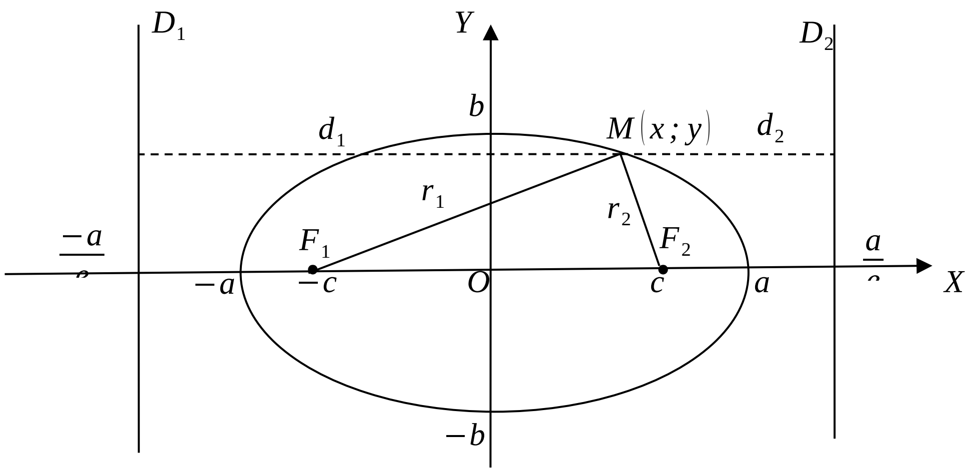

Рис. 2. Бифокальное свойство эллипса

Фокально-директориальное свойство эллипса:

$$\frac{r}{d} = e \qquad \left(\frac{r_1}{d_1} = e, \frac{r_2}{d_2} = e \right) \qquad (4)$$

Параметрические уравнения эллипса: $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, \ t \in [0, 2\pi)$.

2. Гипербола.

Канонического уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (a>0, b>0) \qquad (5)$$

Вершины $A_1(-a;0), A_2(a;0)$, $2a$ – действительная ось, $2b$ - мнимая ось, центр гиперболы, свойства гиперболы (неограниченность и симметричность), асимптоты гиперболы: $y=\pm\frac{b}{a}x$. Фокусы $F_1(-c;0)\,u\,F_2(c;0)$, межфокусное расстояние $2c$, где $c=\sqrt{a^2+b^2}$ (Рис. 3).

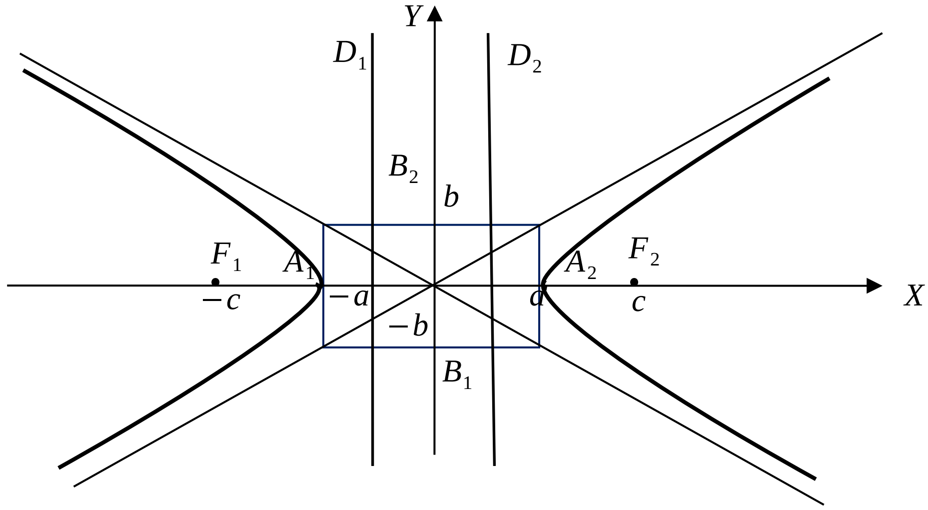

Рис. 3. Элементы гиперболы

Фокальные радиусы r_1 и r_2 точки на гиперболе. Бифокальное свойство гиперболы:

$$|r_1-r_2|=2a \qquad (6)$$

Эксцентриситет: $e=\frac{c}{a}$, $e>1$. Директрисы гиперболы $D_1\,u\,D_2$: $x=\pm\frac{a}{e}$. Фокально-директориальное свойство гиперболы:

$$\frac{r}{d}=e \quad \left(\frac{r_1}{d_1}=e, \frac{r_2}{d_2}=e\right) \qquad (7)$$

Гипербола как график обратно-пропорциональной зависимости $y=\frac{k}{x}$.

Параметрические уравнения гиперболы: $\begin{cases} x=a\,ch\,t \\ y=b\,sh\,t \end{cases}$, $t\in(-\infty;+\infty)$.

Сопряженная гипербола: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$, здесь эксцентриситет $e=\frac{c}{b}$.

3. Парабола.

Каноническое уравнение параболы:

$$y^2=2px \tag{8}$$

$p>0$, p – параметр параболы. Точка $O(0,0)$ - вершина параболы, ось OX −¿ ось параболы. Свойства параболы (неограниченность, симметричность относительно оси). Фокус параболы: $F\left(\frac{p}{2};0\right)$. Фокальный радиус точки: $r=|FM|$. Директриса параболы D: $x=\frac{-p}{2}$ (Рис. 4).

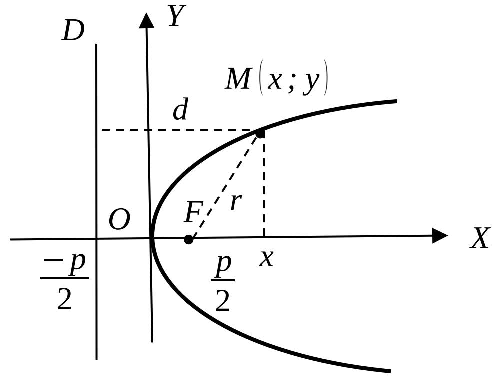

Рис. 4. Элементы параболы

Фокально-директориальное свойство параболы:

$$\frac{r}{d}=1 \qquad (r=d) \tag{9}$$

Эксцентриситет параболы: $e=1$. Разновидности канонического уравнения:

$$y^2=-2px,\quad x^2=2py,\quad x^2=-2py,\quad p>0.$$

4. Общие свойства кривых 2-го порядка.

1) Фокально-директориальное свойство кривых 2-го порядка.

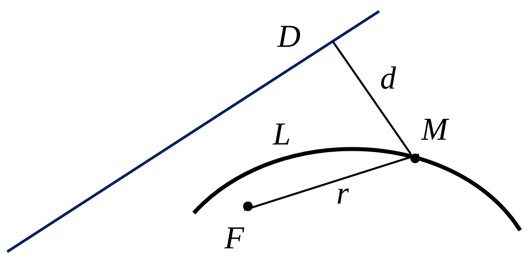

Рис. 5. Кривая 2-го порядка

Теорема 1. Пусть L −¿ кривая 2-го порядка, F – её фокус (один из них), D – директриса (Рис. 5). Тогда $\frac{r}{d}=const=e \quad \forall M\in L$, причём:

$0<e<1 \Leftrightarrow L$ – эллипс, $e>1 \Leftrightarrow L$ – гипербола, $e=1 \Leftrightarrow L$ – парабола.

2) Полярные уравнения кривых 2-го порядка.

<u>Теорема 2</u>. Если полюс полярной системы координат совпадает с фокусом F, а полярная ось l направлена перпендикулярно к директрисе D в сторону, противоположную ей (Рис. 6), то полярное уравнение кривой 2-го порядка имеет вид:

$$r=\frac{pe}{1-e\cos\varphi}\,, \qquad (10)$$

где e – эксцентриситет кривой, $p=d(F,D)$ – расстояние от фокуса F до директрисы D.

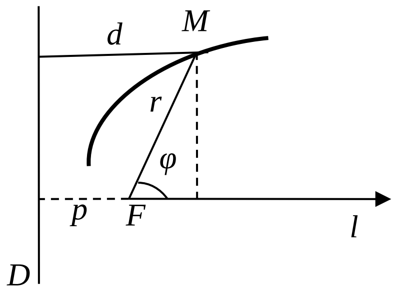

Рис. 6. Полярное уравнение кривой 2-го порядка

3) Уравнения касательных к кривым 2-го порядка.

<u>Теорема 3</u>. Уравнение касательной к кривой 2-го порядка в точке $M_0(x_0; y_0)$ имеет вид:

$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}$ ¿1 −¿ для эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (11)

$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}$ ¿1 −¿ для гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (12)

$yy_0=p(x+x_0)$ −¿ для параболы $y^2=2px$ (13)

4) Оптические свойства кривых 2-го порядка

Луч света, выходящий из одного фокуса эллипса, после зеркального отражения от эллипса проходит через другой его фокус (Рис. 7).

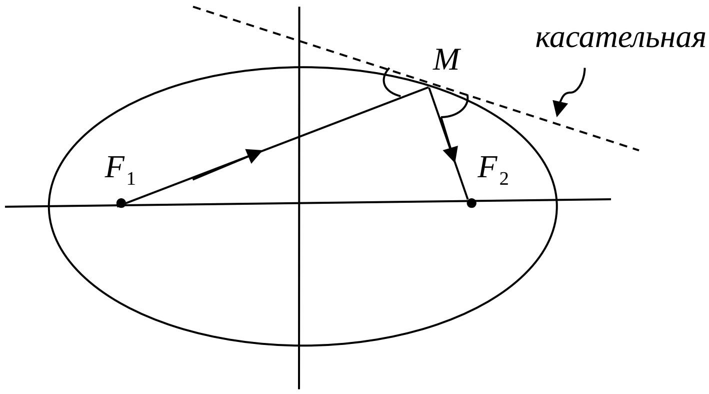

Рис. 7. Оптическое свойство эллипса

Луч света, выходящий из одного фокуса гиперболы, после зеркального отражения от гиперболы проходит так, что кажется выходящим из другого ее фокуса (Рис. 8).

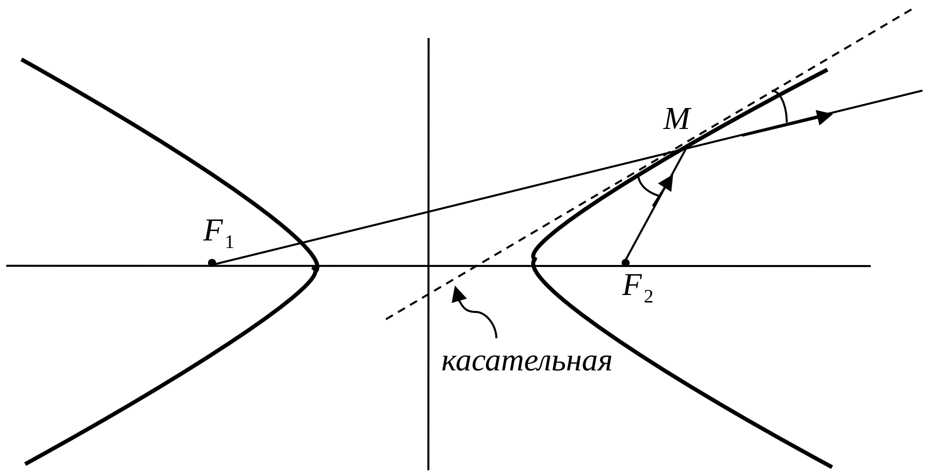

Рис. 8. Оптическое свойство гиперболы

Луч света, выходящий из фокуса параболы, после зеркального отражения от параболы проходит параллельно ее оси (Рис. 9).

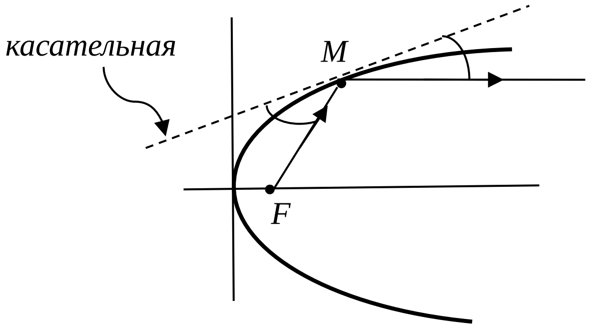

Рис. 9. Оптическое свойство параболы

Разработал доцент

кафедры высшей математики **А. П. Потапов**