ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский
политехнический университет
Петра Великого

Раздел № **02** **Аналитическая геометрия**

Тема № **04** **Аналитическая геометрия в пространстве**

Лекция № **10** **Прямая и плоскость в пространстве**

Учебные вопросы:

1. **Уравнение поверхности в пространстве**
2. **Плоскость в пространстве**
3. **Уравнения линии в пространстве**
4. **Прямая в пространстве**
5. **Основные задачи на прямую и плоскость в пространстве**

Литература.

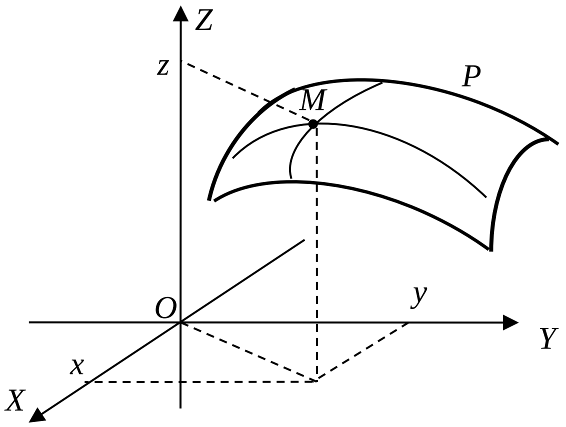
1. Демидович Б. П. Краткий курс высшей математики, 2007, М.: Аст, Астрель

2. Ефимов А. В., Демидович Б. П. Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях. Ч.1. Линейная алгебра и основы математического анализа, 2014, М.: Альянс

3. Потапов А. П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия, Учебник и практикум для прикладного бакалавриата, 2017, М.: Юрайт

ТЕКСТ

1. Уравнение поверхности в пространстве.



$$M(x,y,z)\in P \Leftrightarrow F(x,y,z)=0$$

Рис. 1. Поверхность в пространстве

Уравнение поверхности (Рис. 1) в декартовой системе координат: $F(x,y,z)=0$. Например, уравнение сферы радиуса R с центром в точке $C(x_0;y_0;z_0)$ имеет вид:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2 \qquad (1)$$

Поверхности 1-го порядка:

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad (A^2+B^2+C^2\neq 0) \qquad (2)$$

Поверхности 2-го порядка:

$$A\,x^2+B\,y^2+C\,z^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Iz+K=0, \qquad (3)$$

где $A^2+B^2+C^2+D^2+E^2+F^2\neq 0$.

<u>Теорема</u> 1. Порядок поверхности сохраняется при переходе от одной декартовой системы координат в пространстве к другой.

<u>Теорема</u> 2. Плоскости и только они являются поверхностями 1-го порядка в пространстве.

2. Плоскость в пространстве.

Различные виды уравнений плоскости.

1. Общее уравнение:

$$Ax+By+C\,z+D=0 \;\; (A^2+B^2+C^2\neq 0) \qquad (4)$$

$\vec{n}\{A,B,C\}$ −¿ вектор нормали к плоскости π: $\vec{n}\perp\pi$.

2. Неполное уравнение: $Ax+By+Cz+D=0$, $A\,B\,C\,D=0$, $A^2+B^2+C^2\neq 0$.

3. Нормальное уравнение:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \;\; (A^2+B^2+C^2\neq 0) \qquad (5)$$

$\vec{n}\{A,B,C\}\perp\pi$, $M_0(x_0;y_0;z_0)\in\pi$.

4. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0 \qquad (6)$$

$M_1(x_1;y_1;z_1)\in\pi$, $M_2(x_2;y_2;z_2)\in\pi$, $M_3(x_3;y_3;z_3)\in\pi$

5. Уравнение плоскости «в отрезках»:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \;\; (a\,b\,c\neq 0) \qquad (7)$$

$A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ $-¿$ точки пересечения плоскости π с осями координат: $A(a;0;0)=\pi\cap OX$, $B(0;b;0)=\pi\cap OY$, $C(0;0;c)=\pi\cap OZ$.

6. Нормированное уравнение:

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0 \qquad (8)$$

$\vec{n}_0\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}\perp\pi$, $|\vec{n}_0|=1$, $\vec{n}_0$ направлен в сторону плоскости,

$p=¿\ d(O;\pi)$ – расстояние от начала координат до плоскости π.

Переход от одного вида уравнений плоскости к другому виду. Примеры.

3. Уравнения линии в пространстве.

Способы задания линии L в пространстве.

1) Линия как пересечение 2-х поверхностей. $L=P_1\cap P_2 \Leftrightarrow$

$L:\begin{cases}F_1(x,y,z)=0\\F_2(x,y,z)=0\end{cases}$ – система 2-х уравнений. Например, $P_1-¿$ координатная плоскость OXY: $z=0$, P_2 $-¿$ сфера радиуса R с центром в начале координат: $x^2+y^2+z^2=R^2$. Тогда система: $\begin{cases}z=0\\x^2+y^2+z^2=R^2\end{cases}$ $-¿$ задаёт окружность радиуса R с центром в начале координат в плоскости OXY (Рис. 2)

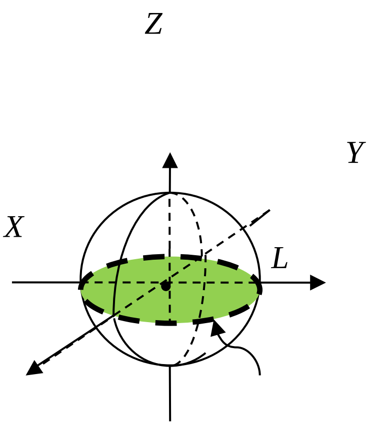


Рис. 2. Линия как пересечение поверхностей

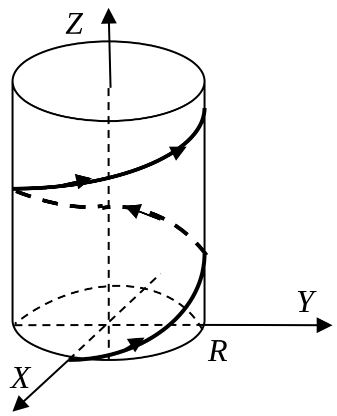


Рис. 3. Винтовая линия

2) Линия как множество точек $M(x,y,z)$, координаты которых задаются системой параметрических уравнений: $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$, $t\in T-¿$ промежуток, t $-¿$параметр. Например, $L:\begin{cases}x=R\cdot\cos t\\y=R\cdot\sin t\\z=k\cdot t\end{cases}$, $t\in[0;+\infty)$, $k>0$ $-¿$ винтовая линия

(Рис. 3), t −¿ угол поворота от оси OX в положительном направлении проекции радиус-вектора текущей точки на плоскость OXY.

Если линия L является траекторией движения точки, то в качестве параметра t принимается время, прошедшее от начала движения.

4. Прямая в пространстве.

Различные виды уравнений прямой в пространстве.

1). Общие уравнения:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \qquad (9)$$

$\vec{n}_1\{A_1,B_1,C_1\} \nparallel \vec{n}_2\{A_2,B_2,C_2\}$, $L=\pi_1\cap\pi_2$, $\vec{n}_1\perp\pi_1$, $\vec{n}_2\perp\pi_2$.

2). Канонические уравнения:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \qquad (l^2+m^2+n^2\neq 0) \qquad (10)$$

$\vec{s}\{l,m,n\}$ −¿ направляющий вектор прямой L: $\vec{s}\parallel L$.

3). Параметрические уравнения:

$$\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \\ z=z_0+nt \end{cases} \quad (l^2+m^2+n^2\neq 0) \qquad (11)$$

$\vec{s}\{l,m,n\}$ −¿ направляющий вектор прямой L: $\vec{s}\parallel L$.

4). Уравнения прямой, проходящей через две заданные точки: M_1 и M_2:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \qquad (12)$$

$M_1(x_1;y_1;z_1)\in L$, $M_2(x_2;y_2;z_2)\in L$.

Переход от одного вида уравнений прямой к другому виду. Примеры.

5. Основные задачи на прямую и плоскость в пространстве.

А) Плоскость.

Угол между плоскостями, заданными общими уравнениями:

$$\cos\varphi ¿ \frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} \qquad (13)$$

Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей:

$$\pi_1\parallel\pi_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2} ¿ \frac{C_1}{C_2}, \quad \pi_1\perp\pi_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0 \qquad (14)$$

Расстояние d от точки $M(a;b;c)$ до плоскости, заданной различными уравнениями: а) нормированным уравнением, б) общим уравнением:

а) $d=|a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma-p|$, б) $d=\dfrac{|Aa+Bb+Cc+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ (15)

Б) Прямая.

Угол между прямыми, заданными каноническими или параметрическими уравнениями:

$$\cos\varphi=\frac{|l_1 l_2+m_1 m_2+n_1 n_2|}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}} \qquad (16)$$

Условия параллельности и перпендикулярности прямых:

$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}\,\text{¿}\,\frac{n_1}{n_2}, \quad L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow l_1 l_2+m_1 m_2+n_1 n_2=0 \qquad (17)$$

В) Прямая и плоскость.

Условие принадлежности двух прямых одной плоскости:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0 \qquad (18)$$

Угол между прямой L: $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ и плоскостью π: $Ax+By+Cz+D=0$

$$\sin\varphi=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}} \qquad (19)$$

Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости:

$$L \parallel \pi \Leftrightarrow Al+Bm+Cn=0, \quad L \perp \pi \Leftrightarrow \frac{A}{l}=\frac{B}{m}\,\text{¿}\,\frac{C}{n} \qquad (20)$$

Условие принадлежности прямой L плоскости π:

$$L \subset \pi \Leftrightarrow \begin{cases} Al+Bm+Cn=0 \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0 \end{cases} \qquad (21)$$

Разработал доцент

кафедры высшей математики **А. П. Потапов**