

Раздел № 03 **Введение в математический анализ**

Тема № 05 **Множества и функции**

Лекция № 12 **Числовые множества**

Учебные вопросы:

- 1. Множества и действия над ними**
- 2. Логическая символика**
- 3. Действительные числа**
- 4. Числовые промежутки**
- 5. Границы числовых множеств**
- 6. Элементы комбинаторики**

Литература.

1. Демидович Б. П. Краткий курс высшей математики, 2007, М.: Аст, Астрель
2. Ефимов А. В., Демидович Б. П. Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях. Ч.1. Линейная алгебра и основы математического анализа, 2014, М.: Альянс
3. Потапов А. П. Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной. Часть 1. Учебник и практикум для академического бакалавриата, 2017, М.: Юрайт

ТЕКСТ

1. Множества и действия над ними.

Понятие множества. Элементы множества, пустое множество, подмножества. Равные множества. Обозначения. Числовые множества, примеры. Конечные и бесконечные множества, счетные и несчетные множества, примеры. Действия над множествами: объединение $A \cup B$, пересечение $A \cap B$, разность $A \setminus B$. Примеры.

2. Логическая символика.

Символы математической логики:

$\Rightarrow$ $\neg$ импликация; $\Leftrightarrow$ $\neg$ эквивалентность; $\neg$ отрицание;
 $\neg$ конъюнкция; $\vee$ $\neg$ дизъюнкция; $\forall$ $\neg$ квантор всеобщности;
 $\exists$ $\neg$ квантор существования.

Пусть α и β $\neg$ некоторые математические высказывания или утверждения, относительно каждого из которых можно сказать истинно (верно) оно или ложно (неверно). Из этих утверждений можно составить новые утверждения:

$\neg$ $\Rightarrow \beta$ означает: из α следует β , т. е. если истинно утверждение α , то истинно и утверждение β .

$\neg$ $\Leftrightarrow \beta$ означает: эквивалентно β , т. е. если истинно утверждение α , то истинно и утверждение β и наоборот, если истинно утверждение β , то истинно и утверждение α .

$\neg$ α означает: не α , т. е. если истинно утверждение α , то ложно утверждение α , а если утверждение α $\neg$ ложно, то утверждение α $\neg$ истинно.

$\neg$ $\alpha \wedge \beta$ означает: $\alpha \wedge \beta$, это утверждение истинно, если оба утверждения α и β истинны.

$\neg$ $\alpha \vee \beta$ означает: $\alpha \vee \beta$, это утверждение истинно, если истинно хотя бы одно из утверждений α или β .

$\neg$ $\left[\forall x \in X : \alpha(x) \right]$ означает: для любого элемента x из множества X справедливо утверждение $\alpha(x)$.

$\neg$ $\left[\exists x \in X : \alpha(x) \right]$ означает: существует элемент x из множества X , для которого справедливо утверждение $\alpha(x)$. Примеры:

$$\begin{aligned} \left[\forall x \in X : \alpha(x) \right] &\Leftrightarrow \left[\exists x \in X : \alpha(x) \right], & \left[\exists x \in X : \alpha(x) \right] \\ &\Leftrightarrow \left[\forall x \in X : \alpha(x) \right]. \end{aligned}$$

Математические утверждения: аксиомы, теоремы, леммы, свойства.
Прямая и обратная теорема, необходимые и достаточные условия, признаки.

Символы Σ (суммирования) и $\prod$ (умножения):

$$\sum_{k=1}^n a_k \stackrel{\text{def}}{=} a_1 + a_2 + \dots + a_n; \quad \prod_{k=1}^n a_k \stackrel{\text{def}}{=} a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n. \quad (1)$$

3. Действительные числа.

Натуральные числа: N – множество всех натуральных чисел. Простые и составные числа. Каноническое разложение натурального числа. Основная теорема арифметики. Аксиома индукции. Метод математической индукции. Примеры. Неравенство Бернулли.

Целые числа: Z – множество всех целых чисел. Десятичная запись числа. Делимость целых чисел. Признаки делимости. Деление с остатком. Четные и нечетные числа. Понятия факториала и двойного факториала.

Рациональные числа: Q – множество всех рациональных чисел. Дроби: правильные и неправильные обыкновенные дроби. Смешанные числа. Десятичные дроби. Бесконечные периодические десятичные дроби, перевод их в обыкновенные дроби. Иррациональные числа.

Действительные (вещественные) числа: R – множество всех действительных чисел. Подмножества R : $N \subset Z \subset Q \subset R$. Основные свойства множества R : упорядоченность, плотность, неограниченность, непрерывность. Аксиома Архимеда.

Модуль числа:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases} \quad (2)$$

Свойства модуля:

1. $|x| \geq 0 \quad \forall x \in R, |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$
2. $|x| \geq 0 \vee |x| \leq 0 \quad \forall x \in R.$
3. $-|x| \leq x \leq |x| \quad \forall x \in R.$
4. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \quad \forall x, y \in R.$
5. $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \quad \forall x, y \in R, y \neq 0.$
6. $\forall a > 0, \forall x \in R$ справедливы утверждения:

$$\textcolor{red}{\lrcorner} x \vee \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a; \quad \textcolor{red}{\lrcorner} x \vee \textcolor{red}{\lrcorner} a \Leftrightarrow -a < x < a.$$

$$\textcolor{red}{\lrcorner} x \vee \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \text{ или } x \geq a; \quad \textcolor{red}{\lrcorner} x \vee \textcolor{red}{\lrcorner} a \Leftrightarrow x \leftarrow a \text{ или } x > a.$$

7. Неравенство треугольника: $\forall x, y \in R$ справедливы неравенства

$$\textcolor{red}{\lrcorner} \leq \vee x \pm y \vee \leq \vee x \vee + \textcolor{red}{\lrcorner} y \vee \textcolor{red}{\lrcorner} \quad (3)$$

4. Числовые промежутки.

Числовая ось. Взаимно-однозначное соответствие между множеством всех действительных чисел R и множеством точек числовой оси.

Геометрический смысл модуля числа.

Числовые промежутки: ограниченные и неограниченные, открытые, замкнутые и полуоткрытые.

Окрестность точки: $U(x_0) = (a, b)$, $x_0 \in (a, b)$, $a < b$;

проколотая окрестность: $U^0(x_0) = U(x_0) \textcolor{red}{\lrcorner} \{x_0 \textcolor{red}{\lrcorner}\} = (a, x_0) \cup (x_0, b)$;

ε -окрестность точки x_0 ($\varepsilon > 0$): $U_\varepsilon(x_0) = \textcolor{red}{\lrcorner} (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$;

проколотая ε -окрестность ($\varepsilon > 0$):

$$U_\varepsilon^0(x_0) = U_\varepsilon(x_0) \textcolor{red}{\lrcorner} \{x_0 \textcolor{red}{\lrcorner}\} = (x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon).$$

Целая $[x]$ и дробная $\{x\}$ части действительного числа x .

Простейшие уравнения и неравенства с модулем:

$$|x - x_0| = a, \quad |x - x_0| < a, \quad |x - x_0| \leq a, \quad |x - x_0| > a, \quad |x - x_0| \geq a.$$

5. Границы числовых множеств.

Ограниченные (снизу, сверху) числовые множества. Верхние и нижние границы. Точная верхняя грань – супремум ($\textcolor{red}{\lrcorner}$), точная нижняя грань – инфимум ($\textcolor{red}{\lrcorner}$). Примеры.

Свойства $\textcolor{red}{\lrcorner}$ и $\textcolor{red}{\lrcorner}$ ($X \subset R$, $X \neq \emptyset$, $a = \inf X$, $b = \sup X$):

1. $a \leq x \leq b \forall x \in X$.
2. Если $a > a$, то $\exists x_1 \in X$: $a > x_1$; если $b < b$, то $\exists x_2 \in X$: $b < x_2$.
3. Если $A \leq x \forall x \in X$, то $A \leq a$; если $x \leq B \forall x \in X$, то $b \leq B$.
4. Если $X_0 \subset X$ и $a_0 = \inf X_0$, $b_0 = \sup X_0$, то $a \leq a_0 \leq b_0 \leq b$.
5. Если $a \in X$, то $a = \min X$; если $a \notin X$, то $\min X$ – $\nexists$.

Если $b \in X$, то $b = \max X$; если $b \notin X$, то $\max X$ – $\nexists$.

Точки сгущения множества, изолированные точки. Замыкание множества. Примеры.

6. Элементы комбинаторики.

Различные комбинации элементов конечного множества. Примеры комбинаторных задач. «Принцип умножения» при нахождении числа всевозможных комбинаций. Размещения, перестановки, сочетания.

Число всех размещений из n элементов по k элементов (A_n^k):

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (4)$$

Число всех перестановок из n элементов (P_n):

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n! \quad (5)$$

Число всех сочетаний из n элементов по k элементов (C_n^k):

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

(6)

Бином Ньютона:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k \quad (7)$$

или:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n a^0 b^n, \text{ где } C_n^k -$$

биномиальные коэффициенты (числа сочетаний из n элементов по k элементов).

Свойства биномиальных коэффициентов:

$$1. C_n^0 = C_n^n = 1$$

$$2. C_n^{n-1} = C_n^1 = n$$

$$3. C_n^k = C_n^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n$$

$$4. C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k, \quad 0 \leq k \leq n-1$$

$$5. \sum_{k=0}^n C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$$

$$6. \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n = 0$$

Треугольник Паскаля.

**Разработал доцент
кафедры высшей математики**

А. П. Потапов